

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ДЛЯ МОДЕЛИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С НЕИЗВЕСТНОЙ ЧЕРНОТОЙ ГРАНИЦЫ

А. Ю. Чеботарев

Аннотация. Рассматривается анализ модели сложного теплообмена в ограниченной трехмерной области, включающей P_1 приближение для уравнения переноса теплового излучения. Процесс сложного теплообмена моделируется системой, состоящей из нелинейного параболического уравнения для температурного поля и эллиптического уравнения для интенсивности излучения, усредненной по всем направлениям. Представлена постановка начально-краевой задачи, в которой известны граничные значения температуры и ее нормальной производной, а краевые условия для интенсивности излучения не задаются. Краевые условия указанного типа для диффузионной модели сложного теплообмена возникают в следующей ситуации. Для задания стандартного краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию, описывающую черноту границы. В случае, если эта функция неизвестна, естественно вместо краевого условия для интенсивности излучения задавать тепловые потоки на границе вместе с граничной температурой. В работе доказана асимптотическая экспоненциальная устойчивость постоянных стационарных состояний без ограничений малости начальных возмущений.

DOI: 10.5281/zenodo.2301819586

Ключевые слова: радиационный теплообмен, диффузионное приближение, модель с неизвестной чернотой границы, асимптотическая устойчивость.

*Посвящается Ивану Егоровичу Егорову
по случаю его 75-летия*

1. Введение

Задачи сложного (радиационно-кондуктивного) теплообмена представляют интерес для инженерных приложений [1, 2]. В статьях [1, 3] рассматривалось диффузионное P_1 приближение уравнения переноса излучения, доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач, соответствующих диффузионным моделям радиационного теплообмена. Краевые задачи для уравнений сложного теплообмена, включающих интегродифференциальное уравнение переноса излучения, исследованы в [4–6].

Анализ устойчивости по Ляпунову стационарных решений диффузионной модели сложного теплообмена рассмотрен в [3, 7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2026-1312 от 20.02.2026).

В работах [8, 9] для уравнений сложного теплообмена предложено использовать краевые условия только для температурного поля и представлен анализ краевых задач, включающих уравнение четвертого порядка для температуры. Оптимизационный алгоритм решения таких задач представлен в [10].

Настоящая статья посвящена анализу устойчивости для следующей модели сложного теплообмена в ограниченной трехмерной области [8]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa(\varphi - |\theta|\theta^3) = g \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\partial_n \theta = 0, \quad \theta = \theta_s, \quad \text{на } \Gamma = \partial\Omega, \quad (2)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3)$$

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры a , b , κ и α , описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [3]. Через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе Γ . Температура на границе $\theta_s > 0$ и источники в правых частях уравнений (1) предполагаются постоянными. Неотрицательная функция θ_0 является заданной.

Краевые условия (2) для диффузионной модели сложного теплообмена возникают в следующей ситуации. Для задания стандартного краевого условия для интенсивности излучения $\alpha\partial_n\varphi + \beta(\varphi - \theta_s^4) = 0$ требуется знать функцию $\beta = \beta(x)$, $x \in \Gamma$, описывающую черноту границы. Если функция β неизвестна, естественно вместо краевого условия для интенсивности излучения задавать тепловые потоки на границе вместе с граничной температурой.

Будем предполагать, что постоянные θ_s и $\varphi_s = \theta_s^4 + g/\kappa$ являются решением стационарных уравнений

$$-a\Delta\theta_s + b\kappa(\theta_s^4 - \varphi_s) = f, \quad -\alpha\Delta\varphi_s + \kappa(\varphi_s - \theta_s^4) = g \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

что справедливо, если $f + bg = 0$.

Основной результат работы состоит в доказательстве глобальной асимптотической устойчивости по Ляпунову постоянных стационарных решений системы (1). Отметим также, что вопрос об асимптотической устойчивости произвольных стационарных решений системы (1) является открытой проблемой.

2. Формализация задачи

В дальнейшем считаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная строго липшицева область, граница Γ которой состоит из конечного числа гладких кусков, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Более точно, будем предполагать, что для области Ω справедливы свойства 1, 2 из [11, гл. 3, § 8]. Через L^p , $1 \leq p \leq \infty$, обозначаем пространство Лебега, а через H^s — пространство Соболева W_2^s ; $H_0^s(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $H^s(\Omega)$.

Пусть $H = H_0^1(\Omega)$, $V = H_0^2(\Omega)$. Через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V . Пространство H отождествляем с пространством

H' , так что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим соответственно через $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_V$ нормы в H и V , а через $\langle f, v \rangle$ — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $f \in H$,

$$\langle f, v \rangle = \frac{\kappa}{\alpha}(f, v) + (\nabla f, \nabla v), \quad \|f\|_H^2 = \langle f, f \rangle, \quad \|f\|_V^2 = \|\Delta f\|^2.$$

Здесь через $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ обозначаем скалярное произведение и норму в $L^2(\Omega)$,

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \|u\|^2 = (u, u).$$

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i) $a, b, \kappa, \alpha, \theta_s, \varphi_s = \theta_s^4 + g/\kappa = \text{const} > 0$, $f, g = \text{const}$, $f + bg = 0$,
- (ii) $\theta_0 \in H^1(\Omega)$.

Для получения слабой формулировки задачи (1)–(3) заметим, что из (1), (2) следует равенство

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta(a\theta + \alpha b\varphi).$$

Уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa}{\alpha}\theta = \frac{\kappa}{\alpha}(a\theta + \alpha b\varphi).$$

Умножим это уравнение на функцию Δv , где $v \in H_0^2(\Omega)$, и проинтегрируем по области Ω . Тогда

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + (h(\theta), \Delta v) = \frac{\kappa}{\alpha}(a\theta + \alpha b\varphi, \Delta v) = \frac{\kappa}{\alpha}(\partial\theta/\partial t, v).$$

Здесь

$$h(\theta) = b\kappa|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa}{\alpha}\theta.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. Пара

$$\theta \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \quad \varphi \in L^2(0, T; V'),$$

называется *слабым решением задачи* (1)–(3) *на интервале* $(0, T)$, если

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &\in L^2(0, T; V'), \quad \theta|_{\Sigma} = \theta_s, \quad \partial_n \theta|_{\Sigma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \\ b\kappa\varphi &= \frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa|\theta|\theta^3 - f, \\ \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t}, v \right\rangle + a(\Delta\theta, \Delta v) - (h(\theta), \Delta v) &= 0 \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{5}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\{\theta, \varphi\}$ — слабое решение задачи (1)–(3) и при этом $\partial\theta/\partial t \in L^2(Q)$, то, учитывая что $|\theta|\theta^3 \in L^2(Q)$, получаем включение $\varphi \in L^2(Q)$ и первое уравнение в (1) выполняется почти всюду в области Q . В этом случае

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t}, v \right\rangle = \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\kappa_a}{\alpha}v - \Delta v \right) = \left(b\kappa\varphi + a\Delta\theta - b\kappa|\theta|\theta^3 + f, \frac{\kappa}{\alpha}v - \Delta v \right) \quad \forall v \in V.$$

Подставив это выражение в (5), выводим

$$-\alpha(\varphi, \Delta v) + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3, v) = (g, v).$$

Следовательно, $\Delta\varphi \in L^2(Q)$ и второе уравнение в (1) также выполняется почти всюду в области Q .

Определим операторы $A, B: V \rightarrow V'$, используя следующие равенства, справедливые для любых $\zeta, v \in V$:

$$\langle A\zeta, v \rangle = a(\Delta\zeta, \Delta v), \quad \langle B\zeta, v \rangle = -(h(\zeta + \theta_s), \Delta v).$$

Пусть θ, φ — слабое решение задачи (1)–(3). Тогда $\theta = y + \theta_s$, где $y \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, $y' \in L^2(0, T; V')$ и функция y является решением задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами

$$y' + Ay + By = 0 \text{ п.в. на } (0, T), \quad y(0) = y_0 := \theta_0 - \theta_s. \quad (6)$$

Здесь $y' = dy/dt$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как $y \in L^2(0, T; V)$, $y' \in L^2(0, T; V')$, то $y \in C([0, T]; H)$ и имеет смысл начальное условие для y . Кроме того, справедливо равенство

$$2\langle y', y \rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa}{\alpha} \|y\|^2 + \|\nabla y\|^2 \right),$$

которое выполняется в смысле распределений на $(0, T)$.

Следующим результатом установлена однозначная разрешимость задачи (1)–(3) на произвольном интервале $(0, T)$.

Теорема 1 [8]. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда существует единственное слабое решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (1)–(3).

3. Асимптотическая устойчивость

В силу произвольности интервала времени $(0, T)$ решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (1)–(3) и задачи (6) можно рассматривать на временном интервале $(0, +\infty)$.

Цель работы состоит в получении оценок экспоненциальной устойчивости нулевого решения задачи (6). При выводе оценок будем использовать следующие неравенства вложения, справедливые для функций из пространства $V = H_0^2(\Omega)$:

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} \leq K_0 \|\Delta v\|, \quad \|v\|^2 \leq K_1 \|\nabla v\|^2, \quad \|\nabla v\|^2 \leq K_2 \|\Delta v\|^2, \quad \|v\|_{L^6(\Omega)} \leq K_3 \|\nabla v\|.$$

Из (6) следует, что для любой функции $v \in V$

$$\langle y' + Ay + By, v \rangle = 0 \text{ или } \langle y', v \rangle + a(\Delta y, \Delta v) - (h(y + \theta_s) - h(\theta_s), \Delta v) = 0.$$

Полагая $v = y$ и учитывая замечание 2, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa}{\alpha} \|y\|^2 + \|\nabla y\|^2 \right) + a \|\Delta y\|^2 + (r(\theta) \nabla y, \nabla y) = 0.$$

Здесь $r(\theta) = 4b\kappa|\theta|^3 + a\kappa/\alpha \geq a\kappa/\alpha$, $\theta = y + \theta_s$. Интегрируя полученное равенство по t , выводим неравенство

$$\frac{\kappa}{\alpha} \|y(t)\|^2 + \|\nabla y(t)\|^2 + 2a \int_0^t \|\Delta y(s)\|^2 ds + \frac{2a\kappa}{\alpha} \int_0^t \|\nabla y(s)\|^2 ds \leq \mu_0. \quad (7)$$

Здесь $\mu_0 = \frac{\kappa}{\alpha} \|y_0\|^2 + \|\nabla y_0\|^2$. Следовательно,

$$\|\nabla y(t)\|^2 + \gamma \int_0^t \|\nabla y(s)\|^2 ds \leq \mu_0, \quad \text{где } \gamma = 2a(1/K_2 + \kappa/\alpha).$$

Поэтому

$$\|\nabla y(t)\|^2 \leq \mu_0 \exp(-\gamma t), \quad \|y(t)\|^2 \leq K_1 \mu_0 \exp(-\gamma t), \quad 2a \int_0^t \|\Delta y(s)\|^2 ds \leq \mu_0.$$

Получим оценку нормы функции $\psi = \varphi - \varphi_s$, где φ — компонента решения задачи (1)–(3), соответствующая интенсивности теплового излучения. Заметим, что

$$b\kappa\psi = y' - a\Delta y + b\kappa(|\theta|\theta^3 - \theta_s^4) \text{ в } V'.$$

Подставляя в это равенство $y' = -Ay - By$, для $v \in V$ получим

$$b\kappa\langle\psi, v\rangle = -\langle Ay + By + a\Delta y - b\kappa(|\theta|\theta^3 - \theta_s^4), v\rangle.$$

Из последнего равенства выводим соотношение

$$\langle\psi, v\rangle = \frac{\kappa}{\alpha} (|\theta|\theta^3 - \theta_s^4, v).$$

Тогда

$$\|\psi\|_{V'} = \sup\{\langle\psi, v\rangle : \|v\|_V = 1\} = \frac{\kappa}{\alpha} \sup\{(|\theta|\theta^3 - \theta_s^4, v) : \|v\|_V = 1\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{V'} &\leq \frac{2K_0\kappa}{\alpha} \int_{\Omega} (|\theta|^3 + \theta_s^3) |y| dx \leq \frac{2K_0\kappa}{\alpha} (\|\theta\|_{L^6(\Omega)}^3 + \|\theta_s\|_{L^6(\Omega)}^3) \|y\| \\ &\leq \frac{2K_0K_1\kappa\mu_0}{\alpha} ((\|\theta_s\|_{L^6(\Omega)} + K_3\mu_0)^3 + \|\theta_s\|_{L^6(\Omega)}^3) \exp(-\gamma t/2). \end{aligned}$$

Полученные оценки позволяют сформулировать следующий основной результат.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда существует единственное слабое решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (1)–(3). Для слабого решения задачи $\{\theta, \varphi\}$ задачи (1)–(3) справедливы оценки глобальной асимптотической устойчивости:

$$\|\nabla(\theta(t) - \theta_s)\|^2 \leq \mu_0 \exp(-\gamma t), \quad \|\theta(t) - \theta_s\|^2 \leq K_1 \mu_0 \exp(-\gamma t),$$

$$2a \int_0^t \|\Delta(\theta(s) - \theta_s)\|^2 ds \leq \mu_0, \quad \|\varphi(t) - \varphi_s\|_{V'} \leq C \exp(-\gamma t/2).$$

Здесь

$$\mu_0 = \frac{\kappa}{\alpha} \|\theta_0 - \theta_s\|^2 + \|\nabla \theta_0\|^2, \quad \gamma = 2a(1/K_2 + \kappa/\alpha),$$

$$C = \frac{2K_0K_1\kappa\mu_0}{\alpha} ((\|\theta_s\|_{L^6(\Omega)} + K_3\mu_0)^3 + \|\theta_s\|_{L^6(\Omega)}^3).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Pinnau R. Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by SP_1 system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5, N 4. P. 951–969.
2. Tse O., Pinnau R., Siedow N. Identification of temperature dependent parameters in laser-interstitial thermo therapy // Math. Models Methods Appl. Sci. 2012. V. 22, N 9. P. 1–29.
3. Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E. Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51, N 6. P. 2511–2519.
4. Amosov A. A., Krymov N. E. On a nonstandard boundary value problem arising in homogenization of complex heat transfer problems // J. Math. Sci. 2020. V. 244. P. 357–377.
5. Amosov A. Nonstationary radiative-conductive heat transfer problem in an absolutely black body with semitransparent inclusions // Math. Methods Appl. Sci. 2023. V. 46, N 4. P. 4237–4262.
6. Amosov A. On limit connection between two problems of complex heat exchange // Appl. Anal. 2025. V. 104, N 16. P. 3099–3116. <https://doi.org/10.1080/00036811.2025.2482154>.
7. Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю. Устойчивость стационарных решений уравнений радиационного теплообмена // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 9. С. 1472–1477.
8. Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D. Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. V. 75. P. 262–269.
9. Колобов А. Г., Пак Т. В., Чеботарев А. Ю. Стационарная задача радиационного теплообмена с граничными условиями типа Коши // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 7. С. 1258–1263.
10. Месенев П. Р., Чеботарев А. Ю. Задача сложного теплообмена с условиями типа Коши на части границы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2023. Т. 63, № 5. С. 183–190.
11. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Чеботарев Александр Юрьевич
Дальневосточный федеральный университет,
о. Русский, п. Аякс, 10, Владивосток 690922

LYAPUNOV STABILITY FOR A COMPLEX HEAT TRANSFER MODEL WITH UNKNOWN BOUNDARY BLACKNESS

A. Yu. Chebotarev

Abstract: The paper analyzes a complex heat transfer model in a bounded three-dimensional domain, including a P_1 -approximation for the radiative transfer equation. The complex heat transfer process is modeled by a system consisting of a nonlinear parabolic equation for the temperature field and an elliptic equation for the radiative intensity, averaged over all directions. A statement of the initial-boundary value problem is presented in which the boundary values of the temperature and its normal derivative are known, while boundary conditions for the radiative intensity are not specified. Boundary conditions of this type for a diffusion model of complex heat transfer arise in the following situation: In order to specify a standard boundary condition for the radiative intensity, it is necessary to find a function describing the boundary blackness. If this function is unknown, it is natural to specify the heat fluxes at the boundary together with the boundary temperature instead of the boundary condition for radiative intensity. In this paper, we prove the asymptotic exponential stability of constant steady states without restrictions on the smallness of initial perturbations.

DOI: 10.5281/zenodo.2301819586

Keywords: radiative heat transfer, diffusion approximation, model with unknown boundary blackness, asymptotic stability.

REFERENCES

1. Pinnau R., “Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by SP_1 system,” *Commun. Math. Sci.*, **5**, No. 4, 951–969 (2007).
2. Tse O., Pinnau R., and Siedow N., “Identification of temperature dependent parameters in laser-interstitial thermo therapy,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**, No. 9, 1–29 (2012).
3. Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., and Kovtanyuk A. E., “Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer,” *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**, No. 6, 2511–2519 (2017).
4. Amosov A. A. and Krymov N. E., “On a nonstandard boundary value problem arising in homogenization of complex heat transfer problems,” *J. Math. Sci.*, **244**, 357–377 (2020).
5. Amosov A., “Nonstationary radiative-conductive heat transfer problem in an absolutely black body with semitransparent inclusions,” *Math. Methods Appl. Sci.*, **46**, No. 4, 4237–4262 (2023).
6. Amosov A., “On limit connection between two problems of complex heat exchange,” *Appl. Anal.*, **104**, No. 16, 3099–3116 (2025).
7. Grenkin G. V. and Chebotarev A. Y., “Stability of stationary solutions of the radiative heat transfer equations computational mathematics and mathematical physics,” **58**, No. 9, 1420–1425 (2018).
8. Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., and Botkin N. D., “Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **75**, 262–269 (2019).

-
9. Kolobov A. G., Pak T. V., and Chebotarev A. Yu., “Stationary problem of radiative heat transfer with Cauchy boundary conditions,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **59**, 1199–1203 (2019).
 10. Mesenev P. R. and Chebotarev A. Yu., “The problem of complex heat transfer with Cauchy-type conditions on a part of the boundary,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **63**, No. 5, 897–904 (2023).
 11. Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N., *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Acad. Press, New York (1968).

Aleksandr Yu. Chebotarev
Far Eastern Federal University,
Russky Island, 10 Ayaks, D 848, Vladivostok 690922, Russia