

УДК 539.375

ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Е. М. Рудой

Аннотация. Для краевой задачи градиентной теории упругости в случае антиплоского сдвига исследуются инвариантные интегралы, не зависящие от контура интегрирования. С использованием метода дифференцирования функционалов энергии по форме области получены формулы для производной энергии при возмущении области. Найдены условия на поле возмущений, обеспечивающие представление производной в виде криволинейного интеграла по произвольному контуру, охватывающему трещину. Построены инвариантные интегралы, соответствующие повороту трещины, ее сдвигу и квазистатическому росту. Для прямолинейной трещины получен аналог интеграла Черепанова — Райса, значение которого определяет скорость высвобождения энергии при подрастании трещины.

DOI: 10.5281/zenodo.2301817658

Ключевые слова: градиентная теория упругости, антиплоская деформация, инвариантные интегралы, трещина, производная по форме области, J -интеграл Черепанова — Райса, L -интеграл.

*Посвящается Ивану Егоровичу Егорову
по случаю его 75-летия*

1. Введение

Теория упругости является одной из фундаментальных дисциплин механики деформируемого твердого тела и широко используется для описания напряженно-деформированного состояния конструкций и элементов. Классические модели линейной теории упругости, как правило, адекватно описывают поведение материалов в макроскопическом масштабе. Однако известно, что при исследовании задач, связанных с концентраторами напряжений (трещинами, включениями, угловыми точками границы), классические решения обладают сингулярностями, что затрудняет их физическую интерпретацию [1–3]. Кроме того, классическая теория упругости не учитывает масштабные эффекты, которые становятся существенными при моделировании микро- и наноэлектро-механических систем [4–6].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 26–11–00009, <https://rscf.ru/project/26-11-00009/>.

© 2026 Рудой Е. М.

Для преодоления указанных трудностей были предложены различные обобщения классической теории упругости, среди которых особое место занимает градиентная теория упругости. Согласно этой теории энергия деформации зависит не только от тензора деформаций первого порядка, но и от градиента деформаций (или производных второго порядка от функции перемещений) [7–10]. Среди различных вариантов градиентных теорий можно выделить так называемую упрощенную градиентную теорию упругости [11–13], которая содержит один масштабный параметр.

Настоящая работа посвящена построению инвариантных интегралов в градиентной теории упругости на примере задачи антиплоской деформации. Классические инвариантные интегралы, такие как J -интеграл Черепанова — Райса, M - и L -интегралы, широко используются в механике разрушения, позволяя вычислять скорость высвобождения энергии при росте трещины без необходимости детального анализа полей напряжений вблизи вершины [1, 2, 14, 15], а также применяются в задачах идентификации дефектов в упругих телах [16, 17]. Для градиентных теорий упругости вопрос о существовании и форме инвариантных интегралов остается открытым, несмотря на ряд работ, появившихся в последние годы [18–20].

Методология, используемая в данной работе, базируется на аппарате дифференцирования функционалов энергии по форме области (shape sensitivity analysis), который активно развивался в последние десятилетия [21–23]. Этот подход позволяет строго вывести формулы для производной функционала энергии при вариации границы и как следствие получить выражения для инвариантных интегралов [24–26].

Целью работы является вывод формулы для производной функционала энергии по форме области в рамках градиентной теории упругости для антиплоской деформации и построение на ее основе инвариантных интегралов. В отличие от классических, полученные интегралы включают не только первые, но и вторые производные перемещений, что отражает градиентный характер модели. В работе рассматриваются три типа возмущений: сдвиг и поворот трещины как целого, а также квазистатическое подрастание прямолинейной трещины. Для последнего случая получен интеграл типа Черепанова — Райса, не зависящий от пути интегрирования и равный производной функционала энергии по длине трещины. Отметим, что в настоящей работе исследуется случай антиплоской деформации, который, несмотря на свою кажущуюся простоту, сохраняет все характерные особенности градиентной теории упругости и может служить модельной задачей для более сложных постановок.

Работа организована следующим образом. В разд. 2 приводится постановка задачи и формулируется вариационная задача. В разд. 3 вводятся необходимые вспомогательные утверждения и формулы для асимптотических разложений. Разд. 4 посвящен анализу чувствительности и выводу формулы для производной функционала энергии по форме. В разд. 5 на основе полученных результатов строятся инвариантные интегралы для сдвига, поворота и подрастания трещины.

2. Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть строго внутри области расположена кривая Γ_0 . Будем считать, что Ω , $\partial\Omega$, Γ_0 удовлетворяют следующим условиям:

- (а) область Ω может быть разбита на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с общей границей Γ ;
- (б) границы областей Ω_1 и Ω_2 липшицевы;
- (в) $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \overline{\Gamma}$;
- (г) $\Gamma_0 \subset \Gamma$;
- (д) Γ_0 является регулярной гладкой кривой.

Определим множество $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_0$ — область (упругое тело), содержащую трещину Γ_0 .

Всюду далее, если не оговорено иное, индексы i, j, k, l принимают значения от 1 до 2. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Определим следующее функциональное пространство:

$$H^{2,0}(\Omega_0) = \left\{ w \in H^2(\Omega_0) \mid w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ п.в. на } \partial\Omega \right\},$$

где n — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$. Стоит отметить, что функции из пространства $H^{2,0}(\Omega_0)$ могут принимать различные значения на берегах разреза Γ_0^+ и Γ_0^- .

Пусть f — заданный вектор внешней нагрузки, $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функционал энергии градиентно-упругого тела в рамках модели антиплоского сдвига [27–31]:

$$\Pi(\Omega_0; u) = \frac{\mu h}{2} \int_{\Omega_0} b(u, u) d\Omega_0 + \frac{\mu l^2 h}{2} \int_{\Omega_0} B(u, u) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} f u d\Omega_0,$$

где билинейные формы $b(\cdot, \cdot)$ и $B(\cdot, \cdot)$ определены следующим образом:

$$b(u, v) = u_{,1}v_{,1} + u_{,2}v_{,2},$$

$$B(u, v) = u_{,11}v_{,11} + u_{,22}v_{,22} + 2u_{,12}v_{,12},$$

μ — модуль сдвига, l — масштабный параметр градиентной теории упругости, h — толщина тела. В дальнейшем полагаем $h = 1$.

Задача о равновесии градиентно-упругого тела в рамках модели антиплоского сдвига формулируется в виде задачи минимизации функционала энергии на пространстве допустимых смещений, а именно: требуется найти функцию $u_0 \in H^{2,0}(\Omega_0)$ такую, что

$$\Pi(\Omega_0; u_0) = \inf_{u \in H^{2,0}(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; u). \quad (1)$$

Используя те же аргументы, что и для доказательства существования решения задачи равновесия упругой пластины с трещиной (см., например, [32]), можно

заключить, что задача (1) имеет единственное решение, которое удовлетворяет вариационному равенству

$$\mu \int_{\Omega_0} b(u_0, u) d\Omega_0 + \mu l^2 \int_{\Omega_0} B(u_0, u) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} f u d\Omega_0 \quad \forall u \in H^{2,0}(\Omega_0). \quad (2)$$

Решение u_0 задачи (1) определяет перемещения градиентно-упругого тела в рамках модели антиплоского сдвига. При условии дополнительной гладкости функция u_0 является решением следующей краевой задачи [33]:

$$\mu l^2 \Delta^2 u_0 - \mu \Delta u_0 = f \quad \text{п.в. в } \Omega_0, \quad (3)$$

$$m(u_0) = 0, \quad t(u_0) = 0 \quad \text{п.в. на } \Gamma_0^\pm, \quad (4)$$

$$u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 \quad \text{п.в. на } \partial\Omega. \quad (5)$$

Здесь для граничных операторов $m(u_0)$ и $t(u_0)$ используются следующие обозначения:

$$m(u_0) = \mu l^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu^2}, \quad t(u_0) = \mu \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \mu l^2 \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u_0 + \frac{\partial^3 u_0}{\partial \nu \partial \tau^2} \right),$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор нормали к Γ_0 , $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ — единичный касательный вектор к Γ_0 ; n — единичный вектор внешней нормали к Ω . Отметим, что уравнение равновесия (4) выполняется в смысле распределений, а краевые условия (4), (5) — в смысле двойственности пространств $H^{1/2}(\Gamma_0)$, $H^{3/2}(\Gamma_0)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_0)$, $H^{-3/2}(\Gamma_0)$ соответственно.

Для проведения анализа чувствительности задачи к изменению формы области определим возмущенную область. Для малого параметра $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ в $\mathbb{R}^2$ рассмотрим взаимно однозначное преобразование координат

$$y = \Phi(\varepsilon, x), \quad (6)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. В дальнейшем для краткости будем писать $\Phi_\varepsilon(x)$ вместо $\Phi(\varepsilon, x)$. При этом компоненты вектор-функции $\Phi_\varepsilon(x) = (\Phi_\varepsilon^1(x), \Phi_\varepsilon^2(x))$ удовлетворяют следующим требованиям гладкости: $\Phi_\varepsilon^i \in C^1(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\mathbb{R}^2))$, $i = 1, 2$, и, кроме того, $\Phi_0(x) = x$.

Применим преобразование координат (6) к области Ω_0 . В результате получим возмущенную область $\Phi_\varepsilon(\Omega)$, содержащую возмущенный разрез $\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Gamma_0)$. Определим возмущенную область с разрезом как $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega) \setminus \bar{\Gamma}_\varepsilon$. Будем считать, что для обратного преобразования $x = \Phi_\varepsilon^{-1}(y)$, где $\Phi_\varepsilon^{-1} = (\Phi_\varepsilon^{-1}, \Phi_\varepsilon^{-2})$, имеют место включения $\Phi_\varepsilon^{-i} \in C^1(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\mathbb{R}^2))$. Кроме того, полагаем, что для каждого $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ множества $\Phi_\varepsilon(\Omega)$, $\Phi_\varepsilon(\partial\Omega)$, Γ_ε удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (а)–(д) для Ω , $\partial\Omega$ и Γ .

По аналогии с пространством $H^{2,0}(\Omega_0)$ определим пространство $H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$. В силу предполагаемой гладкости Φ_ε отображение (6) задает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H^{2,0}(\Omega_0)$ и $H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$ (см. [34]).

В возмущенной области Ω_ε рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u^\varepsilon \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$ такую, что

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) = \inf_{u \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; u), \quad (7)$$

где

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; u) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} b(u, u) d\Omega_\varepsilon + \frac{\mu l^2}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} B(u, u) d\Omega_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} f u d\Omega_\varepsilon.$$

Из теории вариационного исчисления следует, что для каждого достаточно малого ε задача (7) имеет единственное решение, для которого справедливо вариационное равенство, аналогичное (2).

3. Вспомогательные утверждения и формулы

Следуя [35, 36], введем обозначения для функциональной матрицы преобразования (6):

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} = \begin{pmatrix} \Phi_{\varepsilon,1}^1 & \Phi_{\varepsilon,1}^2 \\ \Phi_{\varepsilon,2}^1 & \Phi_{\varepsilon,2}^2 \end{pmatrix}.$$

Определим следующие векторы для частных производных первого и второго порядков:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^t, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^t.$$

Аналогичным образом зададим векторы $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Затем определим функциональные матрицы A и $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}$,

$$A = \begin{pmatrix} \Phi_{\varepsilon,11}^1 & \Phi_{\varepsilon,11}^2 \\ \Phi_{\varepsilon,12}^1 & \Phi_{\varepsilon,12}^2 \\ \Phi_{\varepsilon,22}^1 & \Phi_{\varepsilon,22}^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} (\Phi_{\varepsilon,1}^1)^2 & 2\Phi_{\varepsilon,1}^1 \Phi_{\varepsilon,1}^2 & (\Phi_{\varepsilon,1}^2)^2 \\ \Phi_{\varepsilon,1}^1 \Phi_{\varepsilon,2}^1 & \Phi_{\varepsilon,1}^1 \Phi_{\varepsilon,2}^2 + \Phi_{\varepsilon,2}^1 \Phi_{\varepsilon,1}^2 & \Phi_{\varepsilon,1}^2 \Phi_{\varepsilon,2}^2 \\ (\Phi_{\varepsilon,2}^1)^2 & 2\Phi_{\varepsilon,2}^1 \Phi_{\varepsilon,2}^2 & (\Phi_{\varepsilon,2}^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Используя введенные выше обозначения, преобразование производных можно записать в матричном виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + A \frac{\partial}{\partial y}.$$

В силу гладкости Φ_ε имеет место разложение в ряд по ε :

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon V(x) + r_1(\varepsilon, x) \quad \text{в } \mathbb{R}^2, \quad (8)$$

где $V = (V_1, V_2) = \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$, $r_1(\varepsilon, x) \in C(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; [W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)]^2)$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{r_1(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } [W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)]^2.$$

Из (8) следует, что якобиан $J_\varepsilon(x)$ преобразования (6) допускает представление

$$J_\varepsilon(x) \equiv \left| \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} \right| = 1 + \varepsilon \operatorname{div} V + r_2(\varepsilon, x) \quad \text{в } \mathbb{R}^2,$$

где $r_2 \in C(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$, и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{r_2(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2).$$

Отметим, что для малых ε якобиан $J_\varepsilon(x)$ строго положителен.

Подставляя (8) в функциональные матрицы $\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x}$, A и $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}$, получим следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} &= I + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + r_3(\varepsilon, x), \quad \|r_3(\varepsilon, x)\|_{[W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^4} = o(\varepsilon), \\ A &= \varepsilon \begin{pmatrix} V_{1,11} & V_{2,11} \\ V_{1,12} & V_{2,12} \\ V_{1,22} & V_{2,22} \end{pmatrix} + r_4(\varepsilon, x), \quad \|r_4(\varepsilon, x)\|_{[L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2)]^6} = o(\varepsilon), \\ \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} &= I + \varepsilon \begin{pmatrix} 2V_{1,1} & 2V_{2,1} & 0 \\ V_{1,2} & V_{1,1} + V_{2,2} & V_{2,1} \\ 0 & 2V_{1,2} & 2V_{2,2} \end{pmatrix} + r_5(\varepsilon, x), \\ &\|r_5(\varepsilon, x)\|_{[W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^9} = o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (9)$$

почти всюду в Ω_0 ; I — единичная матрица. Определитель матрицы $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}$ допускает разложение по ε :

$$j_\varepsilon(x) = \left| \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} \right| = 1 + 3\varepsilon \operatorname{div} V(x) + r_6(\varepsilon, x), \quad \|r_6(\varepsilon, x)\|_{L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2)} = o(\varepsilon) \quad \text{п.в. в } \Omega_0.$$

Для достаточно малых ε определитель $j_\varepsilon(x)$ строго положителен, следовательно, существует обратная функциональная матрица $\psi = \left(\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}\right)^{-1}$. Таким образом, справедливы следующие формулы для обратных преобразований производных:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \Psi \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a \frac{\partial}{\partial x}.$$

В силу (9) справедливо следующее разложение по ε матриц Ψ , a и ψ :

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x}\right)^{-1} = I - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + r_7(\varepsilon, x), \quad \|r_7(\varepsilon, x)\|_{[W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^4} = o(\varepsilon), \\ a &= -\left(\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}\right)^{-1} A \left(\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x}\right)^{-1} = -\varepsilon \bar{a}(V) + r_8(\varepsilon, x), \\ &\|r_8(\varepsilon, x)\|_{[L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2)]^6} = o(\varepsilon), \\ \psi &= I - \varepsilon \bar{\psi}(V) + r_9(\varepsilon, x), \quad \|r_9(\varepsilon, x)\|_{[W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^9} = o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\bar{a}(V) = \begin{pmatrix} V_{1,11} & V_{2,11} \\ V_{1,12} & V_{2,12} \\ V_{1,22} & V_{2,22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}(V) = \begin{pmatrix} 2V_{1,1} & 2V_{2,1} & 0 \\ V_{1,2} & V_{1,1} + V_{2,2} & V_{2,1} \\ 0 & 2V_{1,2} & 2V_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Для функции $f_\varepsilon(x) = f(\Phi_\varepsilon(x))$ имеем

$$f_\varepsilon = f + \varepsilon V \cdot \nabla f + o(\varepsilon) \quad \text{п.в. в } \Omega_0.$$

Определим диагональную матрицу $K = \text{diag}(1, 2, 1)$. Билинейные формы $b(u, v)$ и $B(u, v)$ удобно переписать в матричном виде:

$$b(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^t \frac{\partial v}{\partial x}, \quad B(u, v) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^t K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Введем также в рассмотрение следующие билинейные формы:

$$\begin{aligned} A_1(V; u, v) &= b(u, v) \operatorname{div} V - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^t \right) \frac{\partial v}{\partial x}, \\ A_2(V; u, v) &= B(u, v) \operatorname{div} V - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^t (K \bar{\psi}(V) + \bar{\psi}^t(V) K) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^t K \bar{a}(V) \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^t \bar{a}^t(V) K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

4. Анализ чувствительности функционала энергии к изменению формы области

В этом разделе выведем формулу для производной функционала энергии по параметру ε при $\varepsilon = 0$, которая в теории оптимизации форм называется *производной по форме области*.

Пусть u^ε — решение возмущенной задачи (7). Положим $u_\varepsilon(x) = u^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$ и применим координатное преобразование (6) к функциям и интегралам, входящим в вариационное равенство для u^ε . Тогда функция $u_\varepsilon \in H^{2,0}(\Omega_0)$ является решением следующей вариационной задачи:

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega_0} J_\varepsilon \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^t \Psi^t \Psi \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega_0 + \mu l^2 \int_{\Omega_0} J_\varepsilon \left(\psi \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + a \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^t K \left(\psi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega_0 \\ = \int_{\Omega_0} J_\varepsilon f_\varepsilon v d\Omega_0 \quad \forall v \in H^{2,0}(\Omega_0). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично работам [35, 36] можно доказать следующую теорему, характеризующую устойчивость решения при возмущении области.

Теорема 1. Пусть u_ε — решение задачи (11), u_0 — решение задачи (2). Тогда

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^2(\Omega_0)} \leq c\varepsilon,$$

где константа c не зависит от ε .

Применим теперь преобразование координат (6) к интегралам, входящим в функционал энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; u)$ возмущенной задачи (7). В результате получим

функционал Π_ε , определенный на невозмущенном пространстве $H^{2,0}(\Omega_0)$:

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon(\Omega_0; u) = & \frac{\mu}{2} \int_{\Omega_0} J_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^t \Psi^t \Psi \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega_0 \\ & + \frac{\mu l^2}{2} \int_{\Omega_0} J_\varepsilon \left(\psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right)^t K \left(\psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} J_\varepsilon f_\varepsilon u d\Omega_0. \end{aligned}$$

В дальнейшем в силу (9) и (10) удобно использовать асимптотическое представление для $\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u)$:

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon(\Omega_0; u) = & \frac{\mu}{2} \int_{\Omega_0} (b(u, u) + \varepsilon A_1(V; u, u)) d\Omega_0 + \frac{\mu l^2}{2} \int_{\Omega_0} (B(u, u) + \varepsilon A_2(V; u, u)) d\Omega_0 \\ & - \int_{\Omega_0} (fu - \varepsilon u \operatorname{div}(Vf)) d\Omega_0 + o(\varepsilon)r(u) \end{aligned}$$

с некоторой линейной непрерывной формой r .

Теорема 2. Для каждого допустимого возмущения Φ_ε существует производная функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon)$ по форме области, которая задается формулой

$$\begin{aligned} \Pi'(V; u_0) = & \left. \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega_0} A_1(V; u_0, u_0) d\Omega_0 \\ & + \frac{\mu l^2}{2} \int_{\Omega_0} A_2(V; u_0, u_0) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} u_0 \operatorname{div}(Vf) d\Omega_0, \quad (12) \end{aligned}$$

где u_0 — решение невозмущенной задачи (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу того, что преобразование координат (6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H^{2,0}(\Omega_0)$ и $H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$, справедливо равенство

$$\min_{v \in H^{2,0}(\Omega_0)} \Pi_\varepsilon(\Omega_0; v) = \min_{v \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; v) \quad (13)$$

для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

В силу (13) имеем

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} = \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} \leq \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_0) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon}.$$

В то же время справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} = \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} \geq \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Используя теорему 1, можно показать (схему доказательства см., например, в [35, 36]), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_0) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_0) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega_0} A_1(V; u_0, u_0) d\Omega_0 \\
&\quad + \frac{\mu l^2}{2} \int_{\Omega_0} A_2(V; u_0, u_0) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} u_0 \operatorname{div}(Vf) d\Omega_0.
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана.

5. Инвариантные интегралы

5.1. Общий вид инвариантного интеграла. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей ∂D такова, что $\overline{D} \subseteq \overline{\Omega}_0$, и решение u_0 задачи (1) имеет дополнительную H^4 -гладкость в области D вплоть до границы ∂D . Отметим, что такая область существует [37, 38]. Каждый из интегралов в формуле (12) разобьем на сумму двух интегралов: по области D и по оставшейся части $\Omega_0 \setminus \overline{D}$. При сделанных предположениях можно применить обобщенную формулу Грина к интегралам по области D . Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор внешней нормали к ∂D . Тогда формулу (12) после несложных, но несколько трудоемких преобразований с использованием формулы Грина можно представить в виде $\Pi'(\Phi_0) = I(V) + I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_1 = \int_D (\mu \Delta u_0 - \mu l^2 \Delta^2 u_0 + f)(V \cdot \nabla u_0),$$

$$I_2 = - \int_{\Omega_0 \setminus \overline{D}} u_0 \operatorname{div}(Vf) - \int_{\partial D} f(V \cdot \nabla u_0),$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \mu \int_{\Omega_0 \setminus \overline{D}} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^t \left(\frac{1}{2} I \operatorname{div} V - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} d\Omega_0 \\
&+ \mu l^2 \int_{\Omega_0 \setminus \overline{D}} \left(\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)^t \left(\frac{1}{2} I \operatorname{div} V - K \overline{\psi}(V) \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)^t K \overline{a}(V) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) d\Omega_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(V) &= \mu \int_{\partial D} \left(\frac{1}{2} b(u_0, u_0)(V \cdot \nu) - (\nabla u_0 \cdot V)(\nabla u_0 \cdot \nu) \right) ds \\
&\quad + \mu l^2 \int_{\partial D} \left(\frac{1}{2} B(u_0, u_0)(V \cdot \nu) - \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^t H(u_0) \nu \right) \cdot \nabla u_0 \right. \\
&\quad \left. + (\nabla u_0 \cdot V)(\nabla \Delta u_0 \cdot \nu) \right) ds, \quad (14)
\end{aligned}$$

где $H(u_0)$ — матрица Гессе функции u_0 , т. е. $H_{ij}(u_0) = u_{0,ij}$, $i, j = 1, 2$.

Отметим также, что при интегрировании по частям в члене, содержащем смешанную частную производную $V_{i,12}$, можно получить другие представления интеграла по ∂D :

$$\begin{aligned} \bar{I}(V) = \mu \int_{\partial D} & \left(\frac{1}{2} b(u_0, u_0)(V \cdot \nu) - (\nabla u_0 \cdot V)(\nabla u_0 \cdot \nu) \right) ds \\ & + \mu l^2 \int_{\partial D} \left(\frac{1}{2} B(u_0, u_0)(V \cdot \nu) - (H(u_0)V) \cdot (H(u_0)\nu) \right. \\ & - (u_{0,11}u_{0,i}V_{i,1}\nu_1 + 2u_{0,12}u_{0,i}V_{i,1}\nu_2 + u_{0,22}u_{0,i}V_{i,2}\nu_2) \\ & \left. + ((u_{0,11}u_{0,i})_{,1}\nu_1 + 2(u_{0,12}u_{0,i})_{,2}\nu_1 + (u_{0,22}u_{0,i})_{,2}\nu_2)V_i \right) ds, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{I}}(V) = \mu \int_{\partial D} & \left(\frac{1}{2} b(u_0, u_0)(V \cdot \nu) - (\nabla u_0 \cdot V)(\nabla u_0 \cdot \nu) \right) ds \\ & + \mu l^2 \int_{\partial D} \left(\frac{1}{2} B(u_0, u_0)(V \cdot \nu) - (H(u_0)V) \cdot (H(u_0)\nu) \right. \\ & - (u_{0,11}u_{0,i}V_{i,1}\nu_1 + 2u_{0,12}u_{0,i}V_{i,2}\nu_1 + u_{0,22}u_{0,i}V_{i,2}\nu_2) \\ & \left. + ((u_{0,11}u_{0,i})_{,1}\nu_1 + 2(u_{0,12}u_{0,i})_{,1}\nu_2 + (u_{0,22}u_{0,i})_{,2}\nu_2)V_i \right) ds. \quad (16) \end{aligned}$$

Далее найдем условия, при которых производная функционала энергии выражается в виде криволинейного интеграла по ∂D . Заметим, что в силу (3) подынтегральное выражение в I_1 равно нулю. Найдем теперь условия, при которых I_2 и I_3 обращаются в нуль. Очевидно, что $I_2 = 0$ при выполнении условий $f = 0$ или $V = 0$ в $\Omega_0 \setminus D$.

Выражение I_3 обращается в нуль для произвольной скалярной функции u_0 при условии, что для любых векторов $\xi = (x_1, x_2, x_3)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ выполнено

$$\eta^t \left(\frac{1}{2} I \operatorname{div} V - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \eta = 0,$$

$$\xi^t \left(\frac{1}{2} I \operatorname{div} V - K \bar{\psi}(V) \right) \xi = 0, \quad \xi^t K \bar{a}(V) \eta = 0,$$

откуда следует общий вид вектор-функции V :

$$V_1(x_1, x_2) = \alpha x_2 + \beta_1, \quad V_2(x_1, x_2) = -\alpha x_1 + \beta_2, \quad (17)$$

где α, β_1, β_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 2 подобласть $D \subseteq \Omega_0$ с гладкой границей ∂D удовлетворяет следующим предположениям:

- (а) решение u_0 задачи (1) имеет дополнительную H^4 -гладкость в D ;
- (б) $V = 0$ или $f = 0$ в $\Omega_0 \setminus D$;

(в) вектор-функция V имеет вид (17) в $\Omega_0 \setminus \overline{D}$.

Тогда производная функционала энергии по форме области $\Pi'(V; u_0)$ представляется интегралом $I(V)$ вида (14), а также $\bar{I}(V)$ вида (15) и $\bar{\bar{I}}(V)$ вида (16) по границе ∂D области D .

В следующих пунктах на основе теоремы 3 построены инвариантные интегралы для конкретных примеров возмущения области.

5.2. Возмущение сдвига. Выберем срезающую функцию $\theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$, которая финитна в области Ω и $\theta = 1$ в некоторой окрестности $\overline{\mathcal{O}}(\Gamma_0) \subset \mathbb{R}^2$, содержащей разрез Γ_0 . При этом предполагаем, что $\Gamma_0 \subset \overline{\mathcal{O}}(\Gamma_0) \subset \text{supp } \theta \subset \Omega$. Для заданного вектора $p = (p_1, p_2)$ рассмотрим сдвиг разреза в направлении p при помощи возмущения $\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon p \theta(x)$. Применим координатное преобразование (6). В результате получим возмущенную область $\Phi_\varepsilon(\Omega)$, которая в силу финитности θ совпадает с Ω , возмущенный разрез Γ_ε и возмущенную область с разрезом $\Omega \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon$. Будем считать, что $f \equiv 0$ в $\overline{\mathcal{O}}(\Gamma_0)$. Воспользуемся теоремой 3 с $\overline{D} = \text{supp } \theta \setminus \mathcal{O}(\Gamma_0)$. Решение u_0 задачи (1) обладает дополнительной H^4 -гладкостью вне трещины Γ_0 и, следовательно, в $\overline{D}$. Поэтому условие (а) теоремы 3 выполнено. Далее, $V \equiv 0$ вне $\text{supp } \theta$; $f \equiv 0$ в $\overline{\mathcal{O}}(\Gamma_0)$. Следовательно, условие (б) также выполняется. Наконец, в окрестности $\overline{\mathcal{O}}(\Gamma_0)$ функция θ тождественно равна единице, поэтому поле $V \equiv p$ постоянно, и условие (17) выполняется.

Таким образом, приходим к криволинейному интегралу вида (14) по границе ∂D области D . Заметим, что $\partial D = \partial(\text{supp } \theta) \cup \partial \mathcal{O}(\Gamma_0)$. Но интеграл по $\partial(\text{supp } \theta)$ равен нулю в силу предположения о гладкости отображения Φ_ε и того, что $V \equiv 0$ на $\partial(\text{supp } \theta)$. С другой стороны, $\theta \equiv 1$ в окрестности $\mathcal{O}(\Gamma_0)$, поэтому

$$V_{i,j} = 0 \quad \text{на } \partial \mathcal{O}(\Gamma_0) \quad \text{для } i, j = 1, 2.$$

В силу замечания к теореме 2 производная функционала энергии $\Pi'(V; u_0)$ не зависит от выбора срезающей функции θ , а значит, и от $S = \partial \mathcal{O}(\Gamma_0)$. Следовательно, значение интеграла

$$\begin{aligned} I = \mu \int_S \left(\frac{1}{2} b(u_0, u_0)(p \cdot \nu) - (\nabla u_0 \cdot p)(\nabla u_0 \cdot \nu) \right) ds \\ + \mu l^2 \int_S \left(\frac{1}{2} B(u_0, u_0)(p \cdot \nu) + (\nabla u_0 \cdot p)(\nabla \Delta u_0 \cdot \nu) \right) ds \end{aligned}$$

не зависит от гладкого замкнутого контура интегрирования S , окружающего весь разрез Γ_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически мы показали, что значение инвариантного интеграла совпадает с производной функционала энергии по параметру возмущения области, соответствующего сдвигу трещины в направлении заданного вектора p . Если же внутри контура S не содержится каких-либо дефектов (в том числе трещин), то производная функционала энергии равна нулю, а следовательно, и значение инвариантного интеграла равно нулю.

5.3. Возмущение поворота. Пусть θ , $\mathcal{O}(\Gamma_0)$ и f такие же, как и в предыдущем разделе. Рассмотрим возмущение поворота $\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon V(x)$ с $V(x) = (x_2, -x_1)$. Тогда условия теоремы 3 выполняются с $\overline{D} = \text{supp } \theta \setminus \mathcal{O}(\Gamma_0)$. В результате этого получаем инвариантный L -интеграл

$$\begin{aligned} L = \mu \int_S \left(\frac{1}{2} b(u_0, u_0) (x_2 \nu_1 - x_1 \nu_2) - (u_{0,1} x_2 - u_{0,2} x_1) (\nabla u_0 \cdot \nu) \right) \\ + \mu l^2 \int_S \left(\frac{1}{2} B(u_0, u_0) (x_2 \nu_1 - x_1 \nu_2) \right. \\ \left. + (u_{0,1} x_2 - u_{0,2} x_1) (\nabla \Delta u_0 \cdot \nu) - (\hat{H}(u_0) \nu) \cdot \nabla u_0 \right) \end{aligned}$$

по произвольному криволинейному контуру S , окружающему весь разрез Γ_0 , где

$$\hat{H}(u_0) = \begin{pmatrix} u_{0,21} & u_{0,22} \\ -u_{0,11} & -u_{0,12} \end{pmatrix}.$$

5.4. Квазистатический рост трещины. Пусть Γ_0 — прямолинейная трещина, лежащая на оси Ox_1 , т. е.

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (0, a), x_2 = 0\}, \quad a > 0.$$

Пусть $C^1 = (0, 0)$, $C^2 = (a, 0)$ — вершины трещины Γ_0 . Выберем гладкую срезающую функцию θ такую, что $\theta = 1$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}(C^2)$ вершины C^2 и, кроме того, $\overline{\mathcal{O}(C^2)} \subset \text{supp } \theta \subset \Omega$ и $C^2 \cap \overline{\text{supp } \theta} = \emptyset$. Дополнительно предположим, что $\theta_{,2} = 0$ на Γ_0 . Отметим, что данное условие означает, что линии уровня функции θ ортогональны трещине Γ_0 в точках их пересечения. Такое условие возникает также в теории пластин, равновесие которых описывается дифференциальными уравнениями четвертого порядка (см. [39]).

Рассмотрим возмущение $\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon V(x)$, где $V(x) = (\theta(x), 0)$, соответствующее квазистатическому росту трещины вдоль оси Ox_1 . В этом случае формула (12) задает производную функционала энергии по длине трещины, известную в механике разрушения как формулу Гриффитса.

В силу сделанных предположений можно применить теорему 3 с $D = \text{supp } \theta \setminus \overline{\mathcal{O}(C^2)}$, пользуясь теми же рассуждениями, что и в предыдущем пункте. При этом будем использовать представление производной функционала энергии в виде криволинейного интеграла $\overline{I}(V)$. Отметим, что можно также использовать вид $I(V)$ или $\overline{I}(V)$, но в этих случаях инвариантный интеграл будет содержать сингулярные члены (а именно, значение некоторой комбинации производных от u_0 в точке пересечения трещины и контура интегрирования, см., например, [26, 24]), что менее удобно с вычислительной точки зрения.

Граница ∂D будет состоять из четырех частей: $\gamma = \partial(\text{supp } \theta)$, $\gamma_0^\pm = (\text{supp } \theta \setminus \mathcal{O}(C^2)) \cap \Gamma_0^\pm$, $S = \partial \mathcal{O}(C^2)$, где Γ_0^+ и Γ_0^- — положительный и отрицательный берега трещины Γ_0 , соответствующие нормали $\nu = (0, 1)$ к Γ_0 . Интеграл $\overline{I}(V)$ разобьем на четыре слагаемых: $\overline{I}(V) = I_1 + I_0^+ + I_0^- + I_2$. Так же, как и в

предыдущем пункте, будем предполагать, что в окрестности $\overline{\mathcal{O}}(C^2)$ выполняется условие $f = 0$.

В силу того, что $V = 0$ на γ , получаем $I_1 = 0$. Рассмотрим теперь части γ_0^- и γ_0^+ контура интегрирования ∂D . Так как $V = (\theta, 0)$, $\nu = (0, 1)$ и $\theta_{,2} = 0$ на $\gamma_0^\pm$, то

$$\begin{aligned} I_0^\pm &= \mu \int_{\gamma_0^\pm} (-\theta u_{0,1} u_{0,2}) ds \\ &\quad + \mu l^2 \int_{\gamma_0^\pm} \theta (-u_{0,12} \Delta u_0 + (2(u_{0,12} u_{0,1})_{,1} + (u_{0,22} u_{0,1})_{,2})) ds \\ &= \int_{\gamma_0^\pm} \theta (-t(u_0) u_{0,1} + 2\mu l^2 u_{0,12} u_{0,11}) ds. \end{aligned}$$

С учетом краевого условия (4) окончательно получаем

$$I_0^\pm = 2\mu l^2 \int_{\gamma_0^\pm} \theta u_{0,12} u_{0,11} ds. \quad (18)$$

В силу дополнительной гладкости решения подынтегральная функция в (18) ограничена. Кроме того, при фиксированном контуре S — границе области $\mathcal{O}(C^2)$, в которой функция θ принимает значение 1, контур γ может быть произвольным. Следовательно, $I_0^\pm \rightarrow 0$ при $\text{meas } \gamma_0^\pm \rightarrow 0$. Наконец, так как $\theta = 1$ в $\mathcal{O}(C^2)$, то слагаемые в $\overline{I}$, содержащие частные производные от θ , обращаются в нуль.

Таким образом, производную функционала энергии по длине трещины можно представить в виде инвариантного интеграла по криволинейному контуру S , окружающему вершину трещины и пересекающему ее под прямым углом:

$$\begin{aligned} J &= \mu \int_S \left(\frac{1}{2} b(u_0, u_0) \nu_1 - u_{0,1} \nabla u_0 \cdot \nu \right) ds \\ &\quad + \mu l^2 \int_S \left(\frac{1}{2} B(u_0, u_0) \nu_1 + u_{0,12} (u_{0,11} \nu_2 - u_{0,12} \nu_1) \right. \\ &\quad \left. + u_{0,1} (u_{0,111} \nu_1 + 2u_{0,112} \nu_2 + u_{0,222} \nu_2) \right) ds. \quad (19) \end{aligned}$$

Формула (19) представляет собой интеграл типа Черепанова — Райса, который не зависит от пути интегрирования, и его значение равно производной функционала энергии по длине трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974.

2. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
3. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity // *Z. Angew. Math. Mech.* 2012. V. 92, N 9. P. 716–730.
4. Liang F., Wang Z.-X., Zhang B., Luo X.-M., Zhang G.-P. Heterogeneous interface-enhanced strength of Ni/Ni-W laminated nanocomposites for high-temperature MEMS devices // *Composites Part B: Eng.* 2022. V. 15. Art. ID 110170.
5. Serrano F. R., Steinhardt E., Wood R. J. Considerations for the design and rapid manufacturing of pop-up MEMS devices // *Adv. Mater. Technol.* 2024. V. 9. Art. ID 2301940.
6. Xue Z., Saif M.T.A., Huang Y. The strain gradient effect in microelectromechanical systems (MEMS) // *J. Microelectromech. Syst.* 2002. V. 11. P. 27–35.
7. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1964. V. 16. P. 51–78.
8. Mindlin R. D., Eshel N. N. On first strain-gradient theories in linear elasticity // *Int. J. Solids Struct.* 1968. V. 4, N 1. P. 109–124.
9. Niiranen J., Khakalo S., Balabanov V., Niemi A. H. Variational formulation and isogeometric analysis for fourth-order boundary value problems of gradient-elastic bar and plane strain/stress problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2016. V. 308. P. 182–211.
10. Desai S., Sidhardh S. Beyond classical elasticity: A review of strain gradient theories, emphasizing computer modeling, physical interpretations, and multifunctional applications // *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.* 2025. V. 144, N 2. P. 1271–1334.
11. Ru C. Q., Aifantis E. C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity // *Acta Mech.* 1993. V. 101. P. 59–68.
12. Altan S. B., Aifantis E. C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity // *J. Mech. Behav. Mater.* 1997. V. 8, N 3. P. 231–282.
13. Aifantis E. C. Strain gradient interpretation of size effects // *Int. J. Fract.* 1999. V. 95. P. 299–314.
14. Садовский В. М., Садовская О. В. Задача о бегущей краевой дислокации // *Прикл. механика и техн. физика.* 2025. № 1. С. 163–173.
15. Chen Y.-H., Lu T. J. Recent developments and applications of invariant integrals // *Appl. Mech. Rev.* 2003. V. 56, N 5. P. 515–551.
16. Andrieux S., Ben Abda A., Bui Y. Reciprocity principle and crack identification // *Inverse Probl.* 1999. V. 15. P. 59–69.
17. Goldstein R., Shifrin E., Shushpannikov P. Application of invariant integrals to the problems of defect identification // *Int. J. Fract.* 2007. V. 147. P. 45–54.
18. Zhang L., Huang Y., Chen J. Y., Hwang K. C. The mode III full-field solution in elastic materials with strain gradient effects // *Int. J. Fract.* 1998. V. 92. P. 325–348.
19. Georgiadis H. G., Grentzelou C. G. Energy theorems and the J-integral in dipolar gradient elasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2006. V. 43. P. 5690–5712.
20. Lubarda V. A., Markenscoff X. Conservation integrals in couple stress elasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 2000. V. 48. P. 553–564.
21. Khludnev A. M., Sokolowski J. The Griffith formula and the Rice–Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains // *Eur. J. Appl. Math.* 1999. V. 10. P. 379–394.
22. Kovtunen V. A. Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration // *IMA J. Appl. Math.* 2006. V. 71. P. 635–657.
23. Rudoy E. M., Khludnev A. M. Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle // *J. Appl. Ind. Math.* 2009. V. 4, N 3. C. 389–398.
24. Furtsev A., Itou H., Rudoy E. Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 182–183. P. 100–111.
25. Kovtunen V. A., Lazarev N. The energy release rate for non-penetrating crack in poroelastic body by fluid-driven fracture // *Math. Mech. Solids.* 2023. V. 28, N 2. P. 592–610.
26. Khludnev A. M., Shcherbakov V. V. Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler–Bernoulli inclusions // *Math. Mech. Solids.* 2017. V. 22, N 11. P. 2180–2195.

27. Lomakin E. V., Lurie S. A., Rabinskiy L. N., Solyaev Y. O. Stress concentration near stiff cylindrical inclusions under anti-plane shear loading // *Dokl. Phys.* 2020. V. 65, N 11. P. 390–395.
28. Unger D. J., Aifantis E. C. Strain gradient elasticity theory for antiplane shear cracks. I: oscillatory displacements // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2000. V. 34. P. 243–252.
29. Unger D. J., Aifantis E. C. Strain gradient elasticity theory for antiplane shear cracks. II: monotonic displacements // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2000. V. 34. P. 253–265.
30. Vardoulakis I., Exadaktylos G., Aifantis E. Gradient elasticity with surface energy: mode-III crack problem // *Int. J. Solids Struct.* 1996. V. 33, N 30. P. 4531–4559.
31. Rudoy E., Sazhenkov S. Imperfect interface models for elastic structures bonded by a strain gradient layer: the case of antiplane shear // *Z. Angew. Math. Phys.* 2025. V. 76, N 1. Art. ID 42.
32. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
33. Khludnev A. M. Nonlinear boundary problem in strain gradient elasticity for a body with a crack // *Comput. Math. Model.* 2026. (to appear).
34. Nečas J. Direct methods in the theory of elliptic equations. Berlin: Springer, 2012.
35. Rudoy E. M. Invariant integrals for the equilibrium problem for a plate with a crack // *Sib. Math. J.* 2004. V. 45, N 2. P. 388–397.
36. Rudoy E. M. Asymptotics of the energy functional for a fourth-order mixed boundary value problem in a domain with a cut // *Sib. Math. J.* 2009. V. 50, N 2. P. 341–354.
37. Browder F. E. On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations // *Commun. Pure Appl. Math.* 1956. V. 9, N 3. P. 351–361.
38. Кошелев А. И. Об ограниченности в L_p производных решений эллиптических уравнений и систем // *Успехи мат. наук.* 1958. Т. 13, № 4. С. 29–88.
39. Рудой Е. М. Формула Гриффитса для пластины с трещиной // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2002. Т. 5, № 3. С. 155–161.

Рудой Евгений Михайлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090

INVARIANT INTEGRALS IN GRADIENT THEORY OF ELASTICITY FOR ANTIPLANE DEFORMATION

E. M. Rudoy

Abstract: For a boundary value problem in the gradient theory of elasticity for the case of antiplane shear, we study invariant integrals independent of the integration contour. Using the method of differentiating the energy functionals with respect to domain shape, formulas for the energy derivative under domain perturbation are obtained. Conditions on the perturbation field are found that allow the derivative to be expressed as an integral over an arbitrary contour surrounding the crack. We construct invariant integrals corresponding to the crack rotation, translation, and quasi-static growth. For a straight crack, an analog of the Cherepanov–Rice integral is obtained, whose value determines the energy release rate during crack propagation.

DOI: 10.5281/zenodo.2301817658

Keywords: strain gradient elasticity, antiplane deformation, invariant integrals, crack, shape derivative, J -integral, L -integral.

REFERENCES

1. Parton V. Z. and Morozov E. M., *Mechanics of Elastic-Plastic Fracture*, Hemisphere Publ. Corp., Washington, DC (1989).
2. Cherepanov G. P., *Mechanics of Brittle Fracture*, McGraw-Hill, New York (1979).
3. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., and Tani A., “Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**, No. 9, 716–730 (2012).
4. Liang F., Wang Z.-X., Zhang B., Luo X.-M., and Zhang G.-P., “Heterogeneous interface-enhanced strength of Ni/Ni-W laminated nanocomposites for high-temperature MEMS devices,” *Composites Part B: Eng.*, **15**, article ID 110170 (2022).
5. Serrano F. R., Steinhardt E., and Wood R. J., “Considerations for the design and rapid manufacturing of pop-up MEMS devices,” *Adv. Mater. Technol.*, **9**, article ID 2301940 (2024).
6. Xue Z., Saif M.T.A., and Huang Y., “The strain gradient effect in microelectromechanical systems (MEMS),” *J. Microelectromech. Syst.*, **11**, 27–35 (2002).
7. Mindlin R. D., “Micro-structure in linear elasticity,” *Arch. Ration. Mech. Anal.* **16**, 51–78 (1964).
8. Mindlin R. D. and Eshel N. N., “On first strain-gradient theories in linear elasticity,” *Int. J. Solids Struct.*, **4**, No. 1, 109–124 (1968).
9. Niiranen J., Khakalo S., Balabanov V., and Niemi A. H., “Variational formulation and isogeometric analysis for fourth-order boundary value problems of gradient-elastic bar and plane strain/stress problems,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **308**, 182–211 (2016).
10. Desai S. and Sidhardh S., “Beyond classical elasticity: A review of strain gradient theories, emphasizing computer modeling, physical interpretations, and multifunctional applications,” *Comput. Model. Eng. Sci.*, **144**, No. 2, 1271–1334 (2025).
11. Ru C. Q. and Aifantis E. C., “A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity,” *Acta Mech.*, **101**, 59–68 (1993).
12. Altan S. B. and Aifantis E. C., “On some aspects in the special theory of gradient elasticity,” *J. Mech. Behav. Mater.*, **8**, No. 3, 231–282 (1997).

13. Aifantis E. C., "Strain gradient interpretation of size effects," *Int. J. Fract.*, **95**, 299–314 (1999).
14. Sadovskii V. M. and Sadovskaya O. V., "Problem of a Moving Edge Dislocation," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, No. 1, 139–148 (2025).
15. Chen Y.-H. and Lu T. J., "Recent developments and applications of invariant integrals," *Appl. Mech. Rev.*, **56**, No. 5, 515–551 (2003).
16. Andrieux S., Ben Abda A., and Bui Y., "Reciprocity principle and crack identification," *Inverse Probl.*, **15**, 59–69 (1999).
17. Goldstein R., Shifrin E., and Shushpannikov P., "Application of invariant integrals to the problems of defect identification," *Int. J. Fract.*, **147**, 45–54 (2007).
18. Zhang L., Huang Y., Chen J. Y., and Hwang K. C., "The mode III full-field solution in elastic materials with strain gradient effects," *Int. J. Fract.*, **92**, 325–348 (1998).
19. Georgiadis H. G. and Grentzelou C. G., "Energy theorems and the J-integral in dipolar gradient elasticity," *Int. J. Solids Struct.*, **43**, 5690–5712 (2006).
20. Lubarda V. A. and Markenscoff X., "Conservation integrals in couple stress elasticity," *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 553–564 (2000).
21. Khludnev A. M. and Sokolowski J., "The Griffith formula and the Rice–Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains," *Eur. J. Appl. Math.*, **10**, 379–394 (1999).
22. Kovtunenkov V. A., "Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration," *IMA J. Appl. Math.*, **71**, 635–657 (2006).
23. Rudoy E. M. and Khludnev A. M., "Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle," *J. Appl. Ind. Math.*, **4**, No. 3, 389–398 (2009).
24. Furtsev A., Itou H., and Rudoy E., "Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation," *Int. J. Solids Struct.*, **182–183**, 100–111 (2020).
25. Kovtunenkov V. A. and Lazarev N., "The energy release rate for non-penetrating crack in poroelastic body by fluid-driven fracture," *Math. Mech. Solids*, **28**, No. 2, 592–610 (2023).
26. Khludnev A. M. and Shcherbakov V. V., "Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler–Bernoulli inclusions," *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 11, 2180–2195 (2017).
27. Lomakin E. V., Lurie S. A., Rabinskiy L. N., and Solyaev Y. O., "Stress concentration near stiff cylindrical inclusions under anti-plane shear loading," *Dokl. Phys.*, **65**, No. 11, 390–395 (2020).
28. Unger D. J. and Aifantis E. C., "Strain gradient elasticity theory for antiplane shear cracks. Part I: oscillatory displacements," *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **34**, 243–252 (2000).
29. Unger D. J. and Aifantis E. C., "Strain gradient elasticity theory for antiplane shear cracks. Part II: monotonic displacements," *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **34**, 253–265 (2000).
30. Vardoulakis I., Exadaktylos G., and Aifantis E., "Gradient elasticity with surface energy: mode-III crack problem," *Int. J. Solids Struct.*, **33**, No. 30, 4531–4559 (1996).
31. Rudoy E. and Sazhenkov S., "Imperfect interface models for elastic structures bonded by a strain gradient layer: the case of antiplane shear," *Z. Angew. Math. Phys.*, **76**, No. 1, article ID 42 (2025).
32. Khludnev A. M., *Problems of Elasticity Theory in Nonsmooth Domains* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
33. Khludnev A. M., "Nonlinear boundary problem in strain gradient elasticity for a body with a crack," *Comput. Math. Modeling*, (to appear) (2026). DOI 10.1007/s10598-026-09715-6.
34. Nečas J., *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer, Berlin (2012).
35. Rudoy E. M., "Invariant integrals for the equilibrium problem for a plate with a crack," *Sib. Math. J.*, **45**, 388–397 (2004).
36. Rudoy E. M., "Asymptotics of the energy functional for a fourth-order mixed boundary value problem in a domain with a cut," *Sib. Math. J.*, **50**, 341–354 (2009).
37. Browder F. E., "On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations," *Commun. Pure Appl. Math.*, **9**, No. 3, 351–361 (1956).
38. Koshelev A. I., "A priori estimates in L_p and generalized solutions of elliptic equations and systems [in Russian]," *Uspekhi Mat. Nauk*, **13**, No. 4, 29–88 (1958).

- 39.** *Rudoy E. M.*, “The Griffith formula for a plate with a crack [in Russian],” *Sib. J. Ind. Math.*, **5**, No. 3, 155–161 (2002).

Evgeny M. Rudoy
Lavrentiev Institute of Hydrodynamics,
15 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia