

ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ В ДИСКРЕТНОЙ КИНЕТИКЕ

Е. В. Радкевич, О. А. Васильева

Аннотация. Целью статьи является введение в концепцию возможной реализации построения моделей механики сплошной среды из кинетической теории.

Основное уравнение динамики разреженного газа — уравнение Больцмана — является интегродифференциальным уравнением, чрезвычайно сложным, когда его фактическое разрешение необходимо. Хорошо известно, особенно при численных экспериментах, рассогласование правой и левой частей кинетического уравнения Больцмана. Несовершенство кинетического уравнения Больцмана привело к необходимости построения так называемых дискретных кинетических уравнений. Было предложено несколько упрощенных моделей, среди которых дискретные кинетические уравнения с конечным числом групповых скоростей. Эти модели имеют интересные концептуальные и математические особенности. Инвариантные решения в дискретной кинетике — это состояния или соотношения, сохраняющиеся во времени при эволюции системы, описываемой дискретными кинетическими уравнениями. Их роль фундаментальна как в теоретическом анализе, так и в приложениях.

Инварианты отражают фундаментальные законы сохранения: числа частиц (массовый баланс); импульса; энергии; заряда и др. В дискретных моделях это гарантирует, что численная схема не «генерирует» и не «уничтожает» физические величины искусственно. Рассмотрена проблема замыкания моментных цепочек, построенных по инвариантным решениям. Исследована проблема стабилизации периодических возмущений положения равновесия для одномерной 6-скоростной модели. Установлена экспоненциально быстрая стабилизация периодических возмущений положения равновесия к бегущей волне (при общих периодических начальных возмущениях).

DOI: 10.5281/zenodo.2301816765

Ключевые слова: периодические возмущения, стабилизация, дискретные модели кинетики, инвариантные решения.

*Посвящается Ивану Егоровичу Егорову
в связи с его 75-летием*

1. Введение

Целью статьи является введение в концепцию возможной реализации построения моделей механики сплошной среды из кинетической теории. Основное уравнение динамики разреженного газа — уравнение Больцмана — является интегро-дифференциальным уравнением, чрезвычайно сложным, когда его фактическое разрешение необходимо. Хорошо известно, особенно при численных экспериментах, рассогласование правой и левой частей кинетического уравнения Больцмана [1]. В этом смысле интересны результаты, полученные

К. С. Платоновой, А. В. Боровских [2]. Несовершенство кинетического уравнения Больцмана привело к необходимости построения так называемых дискретных кинетических уравнений. Было предложено несколько упрощенных моделей, среди которых дискретные кинетические уравнения с конечным числом групповых скоростей. Эти модели имеют интересные концептуальные и математические особенности [3–7].

Дискретные кинетические модели уравнения Больцмана. Дискретные кинетические модели уравнения Больцмана представляют собой нелинейные систему уравнений в частных производных первого порядка, в которых каждое уравнение системы отвечает за динамику частиц, движущихся с одной групповой скоростью. Квадратичная нелинейность задает парные взаимодействия между частицами. Ниже приведем исследование стабилизации периодических возмущений для четырех-, шести-, девяти-скоростных моделей:

6-Скоростная модель [8]. Групповые скорости модели в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ в R^3 : $\bar{v}_1 = c(-1, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = c(1, 1, 1)$, $\bar{v}_3 = c(-1, -1, 1)$, $\bar{v}_4 = c(1, -1, 1)$, $\bar{v}_{9-i} = -\bar{v}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\bar{v}_9 = c(0, 1, 0)$, $\bar{v}_{10} = -\bar{v}_9$ [9]. Обозначим через $n_i(t, M)$ значение плотности частиц с групповой скоростью v_i в точке M в момент времени t . Функции n_i от t и M суть решения системы

$$\begin{aligned} \partial_t n_1 + c \partial_x n_1 &= Q_1(n), \\ \partial_t n_3 - c \partial_x n_3 &= -Q_1(n), \\ \partial_t n_2 + c \partial_y n_2 &= Q_2(n), \quad \partial_t n_4 - c \partial_y n_4 = -\frac{1}{\varepsilon} Q_2(n), \\ \partial_t n_9 + \partial_z n_9 &= Q_3(n), \\ \partial_t n_{10} - \partial_z n_{10} &= -Q_3(n), \\ Q_1(n) &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})(n_2 n_3 - n_1 n_4) + \frac{\sqrt{6}}{4}(n_3 n_9 - n_1 n_{10}), \\ Q_2(n) &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})(n_1 n_4 - n_2 n_3) + \frac{\sqrt{6}}{4}(n_4 n_9 - n_2 n_{10}), \\ Q_3(n) &= Q_2(n) + Q_1(n), \end{aligned} \tag{1}$$

используемой для моделирования течения Куэтта [8, 10]. Нестационарная задача Куэтта [8–10] о сдвиговом течении и теплопереносе между параллельными бесконечными и движущимися пластинами — одна из простейших задач газовой динамики, моделирование которой приводит к двухточечной начальной краевой задаче. Выберем начало O ортонормальной системы координат $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ в R^3 так, что пластины расположены в плоскостях $y = 0$ и $y = l$, $l > 0$. Предположим, как обычно при трактовке течения Куэтта [9], что поток является одномерным в зависимости от пространственной переменной y и времени t и симметричной относительно плоскости xOy . Это реализуется, когда распределения плотностей частиц симметричны относительно плоскости xOy . Таким образом, неизвестные плотности частиц сводятся к шести плотностям, представляемым плотностями n_1, n_2, n_3, n_4, n_9 и n_{10} . Уравнения (1) (см. [9, 11]) имеют

вид

$$\begin{aligned}
\partial_t n_1 + c \partial_y n_1 &= \frac{1}{\varepsilon} Q_1(n), & \partial_t n_2 + c \partial_y n_2 &= \frac{1}{\varepsilon} Q_2(n), \\
\partial_t n_3 - c \partial_y n_3 &= -\frac{1}{\varepsilon} Q_1(n), & \partial_t n_4 - c \partial_y n_4 &= -\frac{1}{\varepsilon} Q_2(n), \\
\partial_t n_9 + c \partial_y n_9 &= Q_3(n) = (Q_1(n) + Q_2(n)), \\
\partial_t n_{10} - c \partial_y n_{10} &= -\frac{1}{\varepsilon} (Q_1(n) + Q_2(n)).
\end{aligned} \tag{2}$$

9-скоростная модель дискретной кинетики [8].

$$\begin{aligned}
\partial_t f_1 + c \partial_x f_1 &= \alpha J_0 + \beta(J_1 + J_2) + \lambda(J_6 + J_7), \\
\partial_t f_{-1} - c \partial_x f_{-1} &= \alpha J_0 + \beta(J_4 + J_3) - \lambda(J_6 + J_7), \\
\partial_t f_2 + c \partial_y f_2 &= -\alpha J_0 + \beta(J_1 + J_3) + \lambda(J_8 + J_9), \\
\partial_t f_{-2} - c \partial_y f_{-2} &= -\alpha J_0 + \beta(J_2 + J_4) - \lambda(J_8 + J_9), \\
\partial_t f_3 + c \partial_x f_3 + c \partial_y f_3 &= \gamma J_5 - \beta J_1 - \lambda(J_6 + J_9), \\
\partial_t f_{-3} - c \partial_x f_{-3} - c \partial_y f_{-3} &= \gamma J_5 - \beta J_4 + \lambda(J_7 + J_8), \\
\partial_t f_4 + c \partial_x f_4 - c \partial_y f_4 &= -\gamma J_5 - \beta J_2 + \lambda(-J_7 + J_9), \\
\partial_t f_{-4} - c \partial_x f_{-4} + c \partial_y f_{-4} &= -\gamma J_5 - \beta J_3 + \lambda(J_6 - J_8), \\
\partial_t f_0 &= -\beta(J_1 + J_2 + J_3 + J_4),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ неотрицательны. Кроме того,

$$J_0 = f_{-2}f_2 - f_{-1}f_1$$

отвечает за взаимодействия частиц 1 и -1 , которые после столкновения переходят в состояния 2 и -2 , схематично это взаимодействие обозначим как $(1, -1) \rightarrow (2, -2)$. Также имеются столкновения, которые связывают частицы всех трех типов (т. е. с разными величинами кинетической энергии). Имеются четыре реакции: $(1, 2) \rightarrow (0, 3)$, $(1, -1) \rightarrow (0, 4)$, $(-1, -2) \rightarrow (0, -3)$, $(-1, 2) \rightarrow (0, -4)$, т. е.

$$J_1 = f_0 f_3 - f_1 f_2, \quad J_3 = f_0 f_{-4} - f_{-1} f_2, \quad J_2 = f_0 f_4 - f_1 f_{-2}, \quad J_4 = f_0 f_{-3} - f_{-1} f_{-2}.$$

Столкновения между частицами, направленными по диагоналям, т. е. $(3, -3) \rightarrow (4, -4)$, задаются слагаемым вида

$$J_5 = f_{-4}f_4 - f_{-3}f_3.$$

Столкновения между частицами, направленными по диагоналям, и частицами, движущимися параллельно осям, т. е.

$$(-4, 1) \rightarrow (-1, 3), \quad (-3, 1) \rightarrow (-1, 4), \quad (-3, 2) \rightarrow (-4, -2), \quad (4, 2) \rightarrow (-2, 3),$$

приводят к слагаемым вида

$$J_6 = f_3 f_{-1} - f_{-4} f_1, \quad J_7 = f_{-1} f_4 - f_{-3} f_1, \quad J_8 = f_{-4} f_{-2} - f_{-3} f_2, \quad J_9 = f_3 f_{-2} - f_4 f_2.$$

Модель (3) обладает следующим важным свойством. Разложение Чепмена — Энскога [12] для данной модели дает уравнения вязкой жидкости, которые отличаются от уравнений Навье — Стокса для несжимаемой среды только членами вида $O(M^3)$, где M — число Маха. Для этой модели инвариантное решение — типа разлета газового облака:

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1 e^{i(x+y-t)}, & f_{-1} &= A_{-1} e^{i(x+y+t)}, & f_2 &= A_2 e^{i(x+y-t)}, & f_{-2} &= A_{-2} e^{i(x+y+t)}, \\ f_3 &= A_3 e^{i(x+y-2t)}, & f_{-3} &= A_{-3} e^{i(x+y+2t)}, & f_4 &= A_4 e^{i(x+y)}, & f_{-4} &= A_{-4} e^{i(x+y)}, \\ f_0 &= A_0 e^{i(x+y)}. \end{aligned}$$

Подобные решения описывают вихревой разлет газа вдоль плоских кривых, расположенных на поверхности вращения. Для ряда астрофизических проблем представляет интерес задача о разлете газового облака, происходящем в условиях внешнего облучения. Закон сохранения энергии в облаке при этом не выполняется, и энтропия частиц газа возрастает по мере увеличения степени расширения. Разлет такого рода носит сложный характер, но существует простой предельный случай неизэнтропического разлета — изотермический разлет (9 групповых скоростей). При этом полагается, что температура газа не зависит от пространственной координаты, а зависит произвольным образом от времени, т. е. $\theta = \theta(t)$. Зависимость температуры газового облака от времени определяется характером внешнего облучения. Изотермическое приближение уже использовалось ранее для получения некоторых точных решений одномерных газодинамических уравнений (9-скоростная модель)

Кинетическое уравнение Бродуэлла [3, 4].

$$\begin{aligned} \partial_t n_1 + c \partial_x n_1 &= Q_1 = (n_3 n_4 - n_1 n_2), & \partial_t n_2 - c \partial_x n_2 &= Q_2 = (n_3 n_4 - n_1 n_2), \\ \partial_t n_3 + c \partial_y n_3 &= -Q_1, & \partial_t n_4 - c \partial_y n_4 &= -Q_2 = (n_1 n_2 - n_3 n_4). \end{aligned} \quad (4)$$

На примере этих моделей хорошо видна суть уравнения Больцмана. Оно описывает смесь «конкурирующих процессов [7]: релаксации и свободного движения». При помощи теста Пенлеве [13, 14] была установлена неинтегрируемость дискретных моделей Карлемана [13] и Бродуэлла [13]. В работе [15] показано, что любая дискретная кинетическая модель является неинтегрируемой. С вопросами неинтегрируемости тесно связаны групповые свойства дифференциальных уравнений. Для всех кинетических моделей группа точечных симметрий конечна и состоит из сдвигов по пространственным переменным, сдвига по временной переменной и масштабного преобразования. Это ведет к тому, что класс автомодельных решений таких систем весьма узок. К нему относятся стационарные решения, пространственно-однородные решения, а также решения типа бегущих волн и разлета частиц [15]. С физической точки зрения препятствием интегрируемости являются взаимодействия между частицами, более того, никакими заменами переменных невозможно развязать эти взаимодействия и свести динамику к движению свободных частиц [15]. Следствие неинтегрируемости —

чувствительность решений к начальным данным (эффект бабочки), т. е. кинетические модели уравнения Больцмана могут рассматриваться как кандидаты на описание пространственно-неоднородной турбулентности.

Существенное отличие кинетических моделей (4), (1) от моделей Карлемана [5]

$$\partial_t n_1 + \partial_x n_1 = Q_1 = (n_2^2 - n_1^2), \quad \partial_t n_2 - \partial_x n_2 = -Q_1, \quad (5)$$

Годунова, Султангазина [6] и т. п. в том, что в них инвариантные решения — только положения равновесия. Этот факт приводит к экспоненциально быстрой стабилизации к нулю периодических возмущений неотрицательных положений равновесия. В моделях же 4-скоростной Бродуэлла и 6-скоростной есть инвариантные решения — бегущие волны. Нерегулярные периодические возмущения неотрицательных положений равновесия в этих моделях стабилизируются к решениям типа бегущих волн экспоненциально быстро.

Инвариантные решения. N -скоростное (N групповых скоростей) дискретное кинетическое уравнение:

$$\partial_t f_i(x, t) + c_i e_i \cdot \nabla_x f_i = \Omega_i(f_1, \dots, f_N), \quad i = 1, \dots, N,$$

e_i — единичные векторы из R^d , $c_i = \text{const}$, f_i — плотность частиц, движущихся с групповой скоростью $c_i e_i$, $\Omega_i(f_1, \dots, f_N)$ — оператор столкновений, описывающий перераспределение частиц между групповыми скоростями. Инвариантное решение f^{inv} — это такой набор функций $(f_i(x, t), i = 1, \dots, f_N(x, t))$, что

$$\partial_t f_i^{inv} + c_i e_i \cdot \nabla_x f_i^{inv} = 0$$

и выполнены уравнения столкновения

$$\Omega_i(f_1^{inv}, \dots, f_N^{inv}) = 0.$$

Инвариантные решения в дискретной кинетике — это состояния или соотношения, сохраняющиеся во времени при эволюции системы, описываемой дискретными кинетическими уравнениями. Их роль фундаментальна как в теоретическом анализе, так и в приложениях. Инварианты отражают фундаментальные законы сохранения: числа частиц (массовый баланс); импульса; энергии; заряда и др. В дискретных моделях это гарантирует, что численная схема не «генерирует» и не «уничтожает» физические величины искусственно.

Устойчивость и корректность модели. Наличие правильных инвариантов (и отсутствие «лишних» (spurious)) — критерий качества дискретной модели. Если в модели есть лишние линейные инварианты, в получаемой гидродинамике появляются лишние переменные. Стационарные решения могут отличаться от ожидаемых (например, от максвелловского распределения в моделях Больцмана).

Анализ стационарных состояний. Инварианты помогают находить и классифицировать стационарные решения: определять, к какому распределению стремится система при $t \rightarrow \infty$; выделять устойчивые и неустойчивые режимы; выявлять бифуркации и переходы между режимами.

Редукция системы. Знание инвариантов позволяет: понизить размерность системы уравнений (исключить зависимые переменные); перейти к «нормальным координатам», где динамика проще для анализа; строить интегралы движения и первые интегралы. При компьютерном моделировании инварианты служат тестовыми величинами. Отклонение инварианта от начального значения сигнализирует о накоплении численной ошибки, позволяет калибровать шаг по времени и пространству, выбрать схемы интегрирования.

Симметрии и законы сохранения. По теореме Нётер каждому непрерывному преобразованию, оставляющему действие инвариантным, соответствует закон сохранения. В дискретных кинетических моделях это проявляется как сохранение общего числа частиц при перестановках, инвариантность относительно сдвигов (однородность пространства), инвариантность относительно поворотов (изотропия) и т. п.

Асимптотика и предельные режимы. Инварианты задают «каналы» релаксации системы к термодинамическому равновесию (максвелловское распределение), к неравновесным стационарным состояниям (градиенты, потоки), к самоорганизованным структурам (паттернам, кластерам).

Контроль H -теоремы и энтропии. В кинетических уравнениях (особенно типа Больцмана) инварианты связаны с поведением энтропии: H -теорема гарантирует рост энтропии до максимума в равновесии; инварианты числа частиц и энергии задают ограничения на достижимые значения энтропии.

Структурная устойчивость и робастность. Системы с «правильными» инвариантами менее чувствительны к малым возмущениям, допускают асимптотическое разложение по малым параметрам, позволяют строить иерархию моделей (от микро к макроуровню).

Дискретные модели уравнения Больцмана (ДМУБ) [7]. Правильное число инвариантов равно $r + d + 1$, где r — число сортов частиц, d — размерность пространства. Лишние инварианты ведут к неверным гидродинамическим пределам.

Вывод. Инвариантные решения в дискретной кинетике обеспечивают физическую достоверность модели; служат инструментами анализа (устойчивость, стационарные состояния, асимптотика); позволяют контролировать численные схемы и идентифицировать параметры; связывают микроскопическую динамику с макроскопическими законами сохранения. Их корректный учет — необходимое условие для построения адекватных дискретных кинетических моделей в физике, химии, биологии и инженерии.

Ключевые функции инвариантов. Инварианты позволяют определить макроскопические величины: плотность ϱ , температуру T , скорость u и т. д., вычисляемые как моменты распределения:

$$\varrho = \sum_i f_i^{eq}, \quad \varrho u = \sum_i c_i e_i f_i^{eq}, \quad \varrho(u \cdot u + d T) = \sum_i c_i^2 e_i \cdot e_i f_i^{eq} = \sum_i c_i^2 f_i^{eq},$$

поскольку $|e_i| = 1$, и их законы сохранения, где d — число пространственных переменных. Будем считать, что масса частицы $m = 1$. Первой закон сохранения — уравнение неразрывности

$$\partial_t \varrho = \sum_i \partial_t f_i^{eq} = - \sum_i c_i e_i \cdot \nabla_x f_i^{eq} = - \operatorname{div}_x(\varrho u),$$

т. е.

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho u) = 0$$

— уравнение неразрывности. Тензор моментов

$$\Pi_{\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^N c_i^2 e_{i\alpha} e_{i\beta} f_i.$$

Тогда второй закон сохранения — уравнение движения

$$\partial_t(\varrho u_\alpha) + \sum_{\beta=1}^3 \partial_{x_\beta} \Pi_{\alpha\beta} = 0.$$

Вязкие напряжения

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \Pi_{\alpha,\beta} - \varrho u_\alpha u_\beta - p \delta_{\alpha\beta},$$

$p = \frac{1}{\varrho} \sum_{\alpha=1}^3 \Pi_{\alpha,\alpha}$ — давление. Для идеального газа $p = \varrho RT$.

Уравнение энергии

$$\partial_t E + \nabla \cdot Q = 0,$$

где поток энергии

$$Q_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_{i=1}^N c_i^3 e_{i\alpha} e_{i\beta} e_{i\gamma} f_i,$$

$E = \frac{1}{2} \varrho u^2 + \varrho e$ — полная энергия, e — внутренняя энергия

Проблемы замыкания цепочки моментов (обрыва цепочки). Итак, проблема замыкания цепочки моментов связана с определением через макропараметры вязких напряжений $\sigma_{\alpha,\beta}$. Так, замыкание Эйлера определяется условием

$$\sigma_{\alpha,\beta} = 0.$$

Тогда получаем два уравнения механики сплошной среды: уравнение неразрывности и уравнение движения в терминах макровеличин ϱ, U, p :

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}_x(\varrho u) &= 0, \\ \partial_t(\varrho u_\alpha) + \sum_{\beta=1}^3 \partial_{x_\beta}(\varrho u_\alpha u_\beta + p \delta_{\alpha\beta}) &= 0. \end{aligned}$$

Другое замыкание цепочки моментов, замыкание Навье — Стокса, связано с уравнением

$$\sigma^{\alpha\beta} = -\mu \left(\partial_{x_\beta} u_\alpha + \partial_{x_\alpha} u_\beta - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \nabla \cdot u \right),$$

где $\mu \sim \tau r$, τ — время релаксации. Таким образом, проблема замыкания до сих пор связана с феноменологическим определением тензора вязких напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$, что приводит к плохо согласуемым с экспериментом моделям механики сплошной среды.

Предельный переход. Что есть предел инвариантных решений дискретной кинетики при возрастании числа групповых скоростей? При возрастании числа групповых скоростей в дискретных кинетических моделях предел инвариантных решений демонстрирует переход от дискретного к непрерывному описанию и выявляет ключевые асимптотические свойства системы. Речь идет о поведении инвариантов при $N \rightarrow \infty$, где N — число дискретных групповых скоростей. Интересует: как сохраняются/трансформируются законы сохранения; к каким непрерывным инвариантам сходятся дискретные; при каких условиях дискретная модель «сходится» к классической кинетической теории (Больцмана, Власова и т. п.)?

Основные предельные эффекты.

- Сходимость к интегральным законам сохранения. Дискретные суммы, выражающие инварианты (число частиц, импульс, энергия), переходят в интегралы по скоростному пространству.
- Восстановление гидродинамических инвариантов. При $N \rightarrow \infty$ дискретные инварианты позволяют корректно выделить: плотность $\varrho(x, t)$; макроскопическую скорость $u(x, t)$; температуру $T(x, t)$; давление $p(x, t)$. Это дает замкнутую систему уравнений гидродинамики (Эйлера, Навье — Стокса) как предел дискретной кинетики.

Асимптотика к максвелловскому распределению. В пределе большого N стационарные инвариантные решения дискретной модели стремятся к максвелловскому распределению при условии, что дискретная схема корректно воспроизводит симметрии и законы сохранения непрерывной теории.

Подавление «лишних» инвариантов. В дискретных моделях с малым N могут возникать spurious (ложные) инварианты, не имеющие аналога в непрерывной теории. При $N \rightarrow \infty$ такие инварианты исчезают или становятся пренебрежимо малыми; остается только набор физических инвариантов (масса, импульс, энергия).

Переход к непрерывным симметриям. При увеличении N дискретная группа симметрий (перестановки скоростей) «насыщается» и приближается к непрерывным преобразованиям: трансляции в скоростном пространстве; вращения (изотропия); галилеевские преобразования. Соответственно инварианты становятся инвариантами относительно этих непрерывных групп.

Устойчивость и спектральные свойства. Спектр линеаризованного оператора столкновений в дискретной модели при $N \rightarrow \infty$ сходится к спектральному разложению непрерывного оператора; выделяет гидродинамические

моды (медленные) и кинетические моды (быстрые); позволяет строить асимптотические разложения (метод Чепмена — Энскога).

Итог. Предел инвариантных решений при $N \rightarrow \infty$ восстанавливает непрерывные законы сохранения и симметрии; устраняет ложные дискретные инварианты; обеспечивает сходимость к максвелловскому равновесию и гидродинамическим уравнениям; задает критерии качества дискретных кинетических схем. Таким образом, анализ предела при $N \rightarrow \infty$ — ключевой инструмент для обоснования и усовершенствования дискретных кинетических моделей.

2. Стабилизации периодических возмущений положений равновесия дискретных моделей кинетики

Для описания предельных моделей механики сплошной среды, возможно, достаточно рассмотреть множество $\mathcal{N}_{stab,per}$ всех инвариантных распределений f^{inv} , реализуемых стабилизацией периодических возмущений положений равновесия дискретных моделей кинетики. Тогда надо рассмотреть в некоторой топологии точки уплотнения f^{lim} этого множества $\mathcal{N}_{stab,per}$. По всем f^{inv} из $\mathcal{N}_{stab,per}$ строим механику сплошной среды и ищем условие существования точки уплотнения вязких напряжений

$$\sigma_{\alpha,\beta}^{inv} = \Pi_{\alpha,\beta} - \varrho u_\alpha u_\beta - p \delta_{\alpha\beta}.$$

Исследуем условия существования некоторого предела системы

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho^{inv} + \operatorname{div}_x (\varrho^{inv} u^{inv}) &= 0, \\ \partial_t (\varrho u_\alpha^{inv}) + \sum_{\beta=1}^3 \partial_{x_\beta} (\varrho^{inv} u_\alpha^{inv} u_\beta^{inv} + p^{inv} \delta_{\alpha\beta}) &= - \sum_{\beta=1}^3 \partial_{x_\beta} \sigma_{\alpha,\beta}^{inv}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вопрос: насколько структура предельного $\sigma_{\alpha,\beta}^{lim}$ отличается от структуры Навье — Стокса вязких напряжений

$$\sigma^{\alpha\beta} = -\mu \left(\partial_{x_\beta} u_\alpha + \partial_{x_\alpha} u_\beta - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} p \right)?$$

Постановка задачи. Трехмерная 6-скоростная модель. В этом пункте исследуем стабилизацию периодического возмущения положения равновесия 3d 6-скоростной модели (1). Аналогичные результаты получены для модели Бродуэлла и 2d 9v дискретной модели. В первом случае стабилизация к инвариантному решению (бегущей волне), во втором случае стабилизация к инвариантному решению (типа разлета газового облака). Эти результаты общностью своих методов доказательств дают надежду на их справедливость для общих дискретных моделей.

Начальные данные задачи Коши для 3d 6-скоростной модели (1) будем называть начальными данными регулярного возмущения положения равновесия, если их коэффициенты Фурье на «кресте» $((k, l, m) : (k^2 - l^2) (k^2 - m^2) (m^2 -$

$l^2) = 0$) равны нулю. Соответствующее им решение задачи для системы (1) назовем регулярным возмущением положения равновесия. В ближайшей публикации мы приведем доказательство экспоненциально быстрой стабилизации регулярного возмущения к положению равновесия. Проверка этого утверждения на 9-скоростной модели уравнения Больцмана позволяет выдвинуть предположение о справедливости этого факта для общих дискретных моделей кинетики. Таким образом, самое интересное происходит на их «кресте».

Проблема «Креста». Мы покажем, что по аналогии с 2d 4v моделью Бродуэлла периодические возмущения положения равновесия

$$n_1^e n_4^e - n_2^e n_3^e = n_4^e n_9^e - n_2^e n_{10}^e = n_3^e n_9^e - n_1^e n_{10}^e = 0 \quad (7)$$

одномерной 6-скоростной модели (2) дискретной кинетики в общем случае стабилизируются к бегущим волнам. Более того, стабилизация периодических возмущений бегущих волн имеет два характерных поведения, привязанных к разбиению на тройки (n_1, n_2, n_9) и (n_3, n_4, n_{10}) с одинаковыми групповыми скоростями. Первое — когда при стабилизации в тройке (n_1, n_2, n_9) (также и в тройке (n_3, n_4, n_{10})) происходит «уравновешивание» компонент этих групп. Второе — когда возмущение перебрасывается от одной тройки к другой. Например, бегущая волна в одной из троек затухает и возникает во второй тройке (упругое столкновение). Другой случай, когда происходит деформация возмущенной бегущей волны в то время как возмущение в другой тройке затухает. Так же как для одномерной модели Бродуэлла, такое поведение можно интерпретировать как столкновение несимметричных шаров.

Периодические возмущения положения равновесия. Для $q \in (0, 1)$ периодические возмущения положений равновесия

$$\begin{aligned} n_1 &= n_1^e + q\sqrt{n_1^e}u^{(1)}, & n_2 &= n_2^e + q\sqrt{n_2^e}u^{(2)}, & n_3 &= n_3^e + q\sqrt{n_3^e}uu^{(3)}, \\ n_4 &= n_4^e + q\sqrt{n_4^e}uu^{(4)}, & n_9 &= n_9^e + q\sqrt{n_9^e}uu^{(9)}, & n_{10} &= n_{10}^e + q\sqrt{n_{10}^e}uu^{(10)}, \end{aligned}$$

где точки равновесия

$$n_3^e n_2^e = n_1^e n_4^e, \quad n_3^e n_9^e = n_1^e n_{10}^e, \quad n_4^e n_9^e = n_2^e n_{10}^e.$$

Для пространственно-периодических возмущений

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, y) &= u_0^{(1)}(t) + \sum_{l \in \mathcal{Z}_0} u_l^{(1)}(t) e^{ily}, & u^{(2)}(t, y) &= u_0^{(2)}(t) + \sum_{l \in \mathcal{Z}_0} u_l^{(2)}(t) e^{ily}, \\ u^{(3)}(t, y) &= u_0^{(3)}(t) + \sum_{l \in \mathcal{Z}_0} u_l^{(3)}(t) e^{ily}, & u^{(4)}(t, y) &= u_0^{(4)}(t) + \sum_{l \in \mathcal{Z}_0} u_l^{(4)}(t) e^{ikly}, \\ u^{(9)}(t, y) &= u_0^{(9)}(t) + \sum_{l \in \mathcal{Z}_0} u_l^{(9)}(t) e^{ily}, & u^{(10)}(t, y) &= u_0^{(10)}(t) + \sum_{l \in \mathcal{Z}_0} u_l^{(10)}(t) e^{ily}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathcal{Z}_0 = \{l \in Z, l \neq 0\}$$

введем весовые пространства $W_{2,\gamma}^1(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$ с нормами

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+; \mathcal{H}_\sigma)} &= \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_{\sigma-1})} + \|u\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}, \\ \|u\|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 &= \int_0^\infty e^{2\gamma t} (|u_0|^2(t) + \sup_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |u_k|^2(t)) dt, \\ \|u^0(x)\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 &= |u_0^0|^2 + \sup_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |u_k^0|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия препятствия

$$\begin{aligned} \sqrt{n_{10}^e} u_l^{(10)}(0) - \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)}(0) - \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)}(0) &= 0, \\ \sqrt{n_9^e} u_l^{(9)}(0) + \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)}(0) + \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

регулярного возмущения положения равновесия 1d 6v модели (2); $\sigma > 2$ и сумма норм

$$q \| \{u_l^{(1)}(0)\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} + \| \{u_l^{(2)}(0)\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} + \dots + \| \{u_l^{(10)}(0)\} \|_{\mathcal{H}_\sigma}$$

достаточно мала. Тогда Фурье-система регулярного периодического возмущения имеет единственное глобальное решение, экспоненциально быстро стабилизирующееся к нулю. Справедлива оценка

$$\| \{u_l^{(1)}, \dots, u_l^{(10)}\} \|_{L_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_{\sigma-1})}^2 \leq C_0 (\| \{u_l^{(1)}(0)\} \|_{\mathcal{H}_\sigma} + \dots + \| \{u_l^{(10)}(0)\} \|_{\mathcal{H}_\sigma}),$$

где $C_0 > 0$.

Проекция компонент $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_9, u_{10})$ на компоненты (u_1, u_2) для одномерной модели (2). Так же, как для 4-скоростной модели Бродуэлла [16], при исследовании стабилизации периодических возмущений положения равновесия существенную роль играют одномерные модели. Для периодических возмущений положений равновесия система для коэффициентов Фурье решения задачи Коши системы (1) на «кресте» $((k^2 - l^2)(k^2 - m^2)(m^2 - l^2) = 0)$ совпадает с системой для коэффициентов Фурье решения задачи Коши о периодических возмущениях положения равновесия одномерных систем, таких как (2). Начальные данные задачи Коши для 3d 6-скоростной модели (1) будем называть *начальными данными регулярного возмущения положения равновесия*, если их коэффициенты Фурье на «кресте» равны нулю. Соответствующее им решение задачи для системы (1) назовем *регулярным возмущением положения равновесия*.

Проблема «Креста». По аналогии с одномерной моделью Бродуэлла периодические возмущения положения равновесия

$$n_1^e n_4^e - n_2^e n_3^e = n_4^e n_9^e - n_2^e n_{10}^e = n_3^e n_9^e - n_1^e n_{10}^e = 0 \quad (11)$$

одномерной 6-скоростной модели дискретной кинетики (2) в общем случае стабилизируются к бегущим волнам. Покажем, что нарушение второго условия препятствия

$$\sqrt{n_9^e} u_l^{(9)}(0) + \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)}(0) + \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)}(0) \neq 0$$

хотя бы для одного $k \in Z_0$ порождает неустойчивость положения равновесия. Такое возмущение назовем *нерегулярным*. Нерегулярное периодическое возмущение положения равновесия приводит к рождению бегущей волны.

Существенную роль во всех построениях и доказательствах метода Фурье играют базовые операторы (u_1, u_2) проекции. Первый базовый оператор определим следующим образом:

$$\begin{aligned} T_l^{(1)}(u_l^{(1)}) &= \partial_t \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)} + il \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)} + A_l^{(1)}(u) \\ &= \partial_t \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)} + il \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)} + K^{(1)} \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)} + M^{(1)} 2il \int_0^t e^{il(t-s)} \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)} ds. \end{aligned}$$

Второй базовый оператор

$$\begin{aligned} T_l^{(2)}(u_l^{(2)}) &= \partial_t \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)} + il \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)} + B_l^{(2)}(u) \\ &= \partial_t \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)} + il \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)} + K^{(2)} \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)} + M^{(2)} 2il \int_0^t e^{il(t-s)} \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)} ds, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_l^{(1)}(u) &= \frac{1}{2} \left((\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left((n_1^e + n_3^e) \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)} + 2il n_1^e \int_0^t e^{il(t-s)} \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)} ds \right), \\ A_l^{(2)}(u) &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left((n_2^e + n_4^e) \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)} + n_2^e 2il \int_0^t e^{il(t-s)} \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)} ds \right), \end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{T}_l^{(1)} = T_l^{(1)} + A_l^{(2)}, \quad \tilde{T}_l^{(2)} = T_l^{(2)} + B_l^{(1)}.$$

Условие 2.1. Условия корректности

$$K^{(j)} > 0, \quad K^{(j)} - M^{(j)} > 0, \quad j = 1, 2.$$

При выполнении этих условий к операторам $T_l^{(1)}, T_l^{(2)}$ применима теорема Пэли — Винера в весовых пространствах (9).

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия корректности, $\sigma > 2$ и для любого $l \in Z_0$ выполнено первое условие препятствия и-проекции

$$\sqrt{n_{10}^e} u_l^{(10)}(0) - \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)}(0) - \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)}(0) = 0, \quad (12)$$

в то время как

$$\sqrt{n_9^e} u_l^{(9)}(0) + \sqrt{n_1^e} u_l^{(1)}(0) + \sqrt{n_2^e} u_l^{(2)}(0) \neq 0 \quad (13)$$

хотя бы для одного $l \in Z_0$. Дополнительно потребуем, чтобы средние начальных условий

$$u_0^{(1)}(0) = u_0^{(2)}(0) = \dots = u_0^{(10)}(0) = 0.$$

Тогда заменой

$$\begin{aligned}\sqrt{u_e^{(1)}} u_l^{(1)} &= S_l^{(1)} e^{-ilt} + (u_l^{(1)}(0) - S_l^{(1)}) e^{-K_e^{(1)} t} \\ &\quad + R_l^{(1)} T_{u,l}^{-1}(e^{ilt}) + (\tilde{T}_{u,l}^{(1)})^{-1}(X_l^{(1)}), \quad X_l^{(1)} \in L_{2,\gamma}(R_+), \\ \sqrt{u_e^{(2)}} u_l^{(2)} &= S_l^{(2)} e^{-ilt} + (u_l^{(2)}(0) - S_l^{(2)}) e^{-K_e^{(2)} t} \\ &\quad + R_l^{(2)} (T_{u,l}^{(1)})^{-1}(e^{ilt}) + (\tilde{T}_{u,l}^{(2)})^{-1}(X_l^{(2)}), \quad X_l^{(2)} \in L_{2,\gamma}(R_+)\end{aligned}\tag{14}$$

Фурье система (u_1, u_2) -проекцией приводится к виду

$$\begin{aligned}X_l^{(1)} - X_l^{(2)} &= q\mathcal{L}_l^{(1)}(u) + q\mathcal{L}_l^{(2)}(u) + \hat{F}_l^{(1)} - \hat{F}_l^{(2)}, \\ X_l^{(2)} - B_l^{(1)}((\tilde{T}_l^{(2)})^{-1}(X_l^{(2)})) - A_l^{(1)}((\tilde{T}_l^{(1)})^{-1}(X_l^{(1)})) &= q\mathcal{L}_l^{(2)}(u) + \hat{F}_l^{(2)} + q\mathcal{Q}_l(u), \\ \hat{F}_l^{(1)}, \hat{F}_l^{(2)} &\in L_{2,\gamma}(R_+).\end{aligned}\tag{15}$$

Квадратичная форма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_l(u) &= \sum_{l_1+l_2=l} \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3} \right) \\ &\quad \times \left(\sqrt{n_1^e} (\tilde{T}_{l_1}^{(1)})^{-1}(X_{l_1}^{(1)}) \, 2il_2 \int_0^t e^{il_2(t-s)} \sqrt{n_2^e} (\tilde{T}_{l_2}^{(2)})^{-1}(X_{l_2}^{(2)}) \, ds \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{n_2^e} (\tilde{T}_{l_1}^{(2)})^{-1}(X_{l_1}^{(2)}) \, 2il_2 \int_0^t e^{il_1(t-s)} \sqrt{n_1^e} (\tilde{T}_{l_2}^{(1)})^{-1}(X_{l_2}^{(1)}) \, ds \right) \in L_{2,\gamma}(R_+).\end{aligned}$$

Теорема 2.3. Пусть

$$\min \left(\frac{n_1^e + n_9^e}{n_2^e}; \frac{n_9^e + n_2^e + n_1^e}{n_1^e} \right) \gg \frac{(\sqrt{4} + \sqrt{6})}{\sqrt{3}},\tag{16}$$

$\sigma > 2$, выполнены условия теоремы 2.2 и

$$q(\|\{u_l^{(1)}(0)\}\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\{u_l^{(2)}(0)\}\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \dots + \|\{u_l^{(10)}(0)\}\|_{\mathcal{H}_\sigma})$$

достаточно мало. Тогда нерегулярное периодическое возмущение положения равновесия одномерной 6-скоростной модели стабилизируется к бегущей волне экспоненциально быстро.

Заключение. Проведенный нами анализ двух-, трех-, четырех-, шести- и девяти-скоростных моделей дискретной кинетики установил возникновение в их одномерных моделях (на «кресте») с ростом числа групповых скоростей цепочки инвариантных решений, так что периодические возмущения предыдущего экспоненциально быстро стабилизируются к последующему. Такой анализ дает надежду на выяснении взаимосвязи дискретной кинетики и уравнения Больцмана. Групповой анализ дискретных моделей позволит выделить бесконечную упорядоченную цепочку инвариантных решений при неограниченном росте числа групповых скоростей. Более того, существование в каком-то смысле предела для этой цепочки, возможно, даст приложения к моделированию несжимаемых течений [8], адекватного описания тонких кинетических эффектов, таких как ударные волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boltzmann L. Lectures on gas theory. Berkeley, CA: Univ. Calif. Press, 1964.
2. Платонова К. С., Боровских А. В. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Инварианты и проблема замыкания моментной системы // Теор. и мат. физика. 2021. Т. 208, № 3. С. 367–386.
3. Broadwell J. E. Shock structure in a simple discrete velocity gas // Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 1243–1247.
4. Broadwell J. E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method // J. Fluid Mech. 1964. V. 19. P. 401–414.
5. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Годунов С. К., Султангазин У. М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи мат. наук. 1974. Т. 24, № 3. С. 3–51.
7. Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
8. Ильин О. В. Дискретная модель уравнения Больцмана для девяти скоростей: решение в виде суммы Вайлда и приложения к моделированию несжимаемых течений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2022. Т. 62, № 4. С. 705–720.
9. Ильин О. В. Изучение устойчивости плоского течения Куэтта для кинетического модельного уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 5. С. 902–915.
10. D’Almeida A., Gatignol R. Boundary conditions for discrete models of gases and applications to Couette flows // Computational Fluid Dynamics (D. Leutloff, R. C. Srivastava, eds.), Berlin; Heidelberg: Springer, 1995. P. 115–130.
11. Cabannes H. Couette flow for a gaz with a discrete velocity distribution // J. Fluid Mech. 1976. V. 76. P. 273–287.
12. Радкевич Е. В., Васильева О. А., Духновский С. А. О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова — Султангазина // Соврем. математика. Фундамент. направления. 2016. Т. 60. С. 23–81.
13. Euler N., Steeb W.-H. Painleve test and discrete Boltzmann equations // Aust. J. Phys. 1989. V. 42. P. 1–10.
14. Линдблом О., Эйлер Н. Решение уравнения Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати // Теор. и мат. физика. 2002. Т. 131. С. 179–192.
15. Puyin O. Nonintegrability and symmetries of the Boltzmann discrete kinetic equations // Lett. Math. Phys. 2024. V. 68, N 4. P. 605–620.
16. Шаяхметова Р. Ф. Вихревой разлет одноатомного газа вдоль плоских кривых // Прикл. мех. техн. физ. 2018. Т. 59, № 2. С. 63–73.

Радкевич Евгений Владимирович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские Горы, 1, Москва 119991

Васильева Ольга Александровна
Московский государственный строительный университет,
Ярославское шоссе, 26, Москва 129337

THE CLOSURE PROBLEM IN DISCRETE KINETICS

E. V. Radkevich and O. A. Vasilieva

Abstract: The purpose of this article is to introduce the concept of possible implementation of continuum mechanics models based on kinetic theory. The fundamental equation of rarefied gas dynamics – the Boltzmann equation – is an integro-differential equation, extremely complex when its actual resolution is necessary. The mismatch between the right- and left-hand sides of the Boltzmann kinetic equation is well known, especially in numerical experiments. The imperfection of the Boltzmann kinetic equation led to the need to construct so-called discrete kinetic equations. Several simplified models have been proposed, including discrete kinetic equations with a finite number of group velocities. These models have interesting conceptual and mathematical features. Invariant solutions in discrete kinetics are states or relations that are preserved over time during the evolution of a system described by discrete kinetic equations. Their role is fundamental both in theoretical analysis and in applications.

The invariants reflect the fundamental conservation laws for the number of particles (the mass balance), momentum, energy, charge, etc. In discrete models, this ensures that the numerical scheme does not artificially generate or destroy physical quantities. We consider the problem of closing moment chains constructed with invariant solutions and investigate problems of stabilizing periodic perturbations of the equilibrium position for a one-dimensional 6-velocity model. An exponentially fast stabilization of periodic perturbations of the equilibrium position to a traveling wave is established (with general periodic initial perturbations).

DOI: 10.5281/zenodo.2301816765

Keywords: periodic perturbation, stabilization, discrete model of kinetics, invariant solution.

REFERENCES

1. Boltzmann L., Lectures on Gas Theory, Univ. Calif. Press, Berkeley, CA (1964).
2. Platonova K. S. and Borovskikh A. V., “Group analysis of the one-dimensional Boltzmann equation. Invariants and the problem of closing the moment system [in Russian],” *Teor. Mat. Fiz.*, **208**, No. 3, 367–386 (2021).
3. Broadwell J. E., “Shock structure in a simple discrete velocity gas,” *Phys. Fluids*, **7**, 1243–1247 (1964).
4. Broadwell J. E., “Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method,” *J. Fluid Mech.*, **19**, 401–414 (1964).
5. Carleman T., Mathematical Problems of the Kinetic Gas Theory [in Russian], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1960).
6. Godunov S. K. and Sultangazin U. M., “Discrete models of the Boltzmann kinetic equation [in Russian],” *Uspekhi Mat. Nauk*, **26**, No. 3, 3–51 (1974).
7. Vedenyapin V. V., “Boltzmann and Vlasov kinetic equations [in Russian],” *Fizmatlit*, Moscow (2001).
8. Ilyin O. V., “A discrete nine-velocity model of the Boltzmann equation: solution in the form of Wild sum and applications to simulating incompressible flows [in Russian],” *Comput. Math. Math. Phys.*, **62**, No. 4, 685–699 (2022).

9. Ilyin O. V., "Study of the stability of a plane Couette flow for a model kinetic equation [in Russian]," *Comput. Math. Math. Phys.*, **49**, No. 5, 902–915 (2009).
10. D’Almeida A. and Gatignol R., "Boundary conditions for discrete models of gases and applications to Couette flows," in: *Computational Fluid Dynamics* (D. Leutloff, R. C. Srivastava, eds.), pp. 115–130, Springer, Berlin; Heidelberg (1995).
11. Cabannes H., "Couette flow for a gas with a discrete velocity distribution," *J. Fluid Mech.*, **76**, 273–287 (1976).
12. Radkevich E. V., Vasilieva O. A., and Dukhnovsky S. A., "On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations," *J. Math. Sci., New York*, **235**, No. 4, 392–454 (2018).
13. Euler N. and Steeb W.-H., "Painleve test and discrete Boltzmann equations," *Aust. J. Phys.*, **42**, 1–10 (1989).
14. Lindblom O. and Euler N., "Solution of the Boltzmann equation for discrete velocities using the Bateman and Riccati equations [in Russian]," *Teor. Mat. Fiz.*, **131**, 179–192 (2002).
15. Ilyin O., "Nonintegrability and symmetries of the Boltzmann discrete kinetic equations," *Lett. Math. Phys.*, **68**, No. 4, 605–620 (2024).
16. Shayahmetova R. F., "Vortex scattering of monatomic gas along plane curves [in Russian]," *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, **59**, No. 2, 63–73 (2018)

Evgeny V. Radkevich
Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

Olga A. Vasilyeva
Moscow State University of Civil Engineering,
26 Yaroslavskoe Highway, Moscow 129337, Russia