

УДК 517.957

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ПРИ СЛАБЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ НА ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

А. Г. Подгаев

Аннотация. Исследуется задача Стефана. Условия на входные данные являются пограничными, при которых решение слабое (в постановке нет уравнения границы) и при которых — классическое (фазы разделены искомой границей). Установлена сильная глобальная по времени разрешимость как в случае начальной температуры, близкой к температуре фазового перехода, так и без этого условия.

DOI: 10.5281/zenodo.2301816956

Ключевые слова: задача Стефана, процесс итераций, неподвижная точка.

*Посвящается Ивану Егоровичу Егорову
по случаю его 75-летия*

Введение

Работа является продолжением исследований, начатых в [1]. Обзоры работ и большое число результатов по задаче Стефана изложены в [2–7].

Классические решения существуют при сильных требованиях на входные данные, и определяется граница фаз. У обобщенных нахождение границы не предусмотрено и возможно появление зон, находящихся в разных агрегатных состояниях («шуга»). Разбор понятий слабых и сильных постановок (решений) имеется в [7].

Исследуется задача с начальной функцией из класса W_2^1 , и в начальный момент времени возможно наличие «шуги», $u_0 \geq 0$. В том и в другом случаях обычно рассматривается слабая постановка. Тем не менее мы доказываем характерное для сильной постановки наличие границы раздела фаз из класса W_4^1 . В [8] построен пример двухфазной задачи Стефана, в которой нарушено условие на начальную функцию $|\nabla u_0| > 0$. В результате развивается обобщенное

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00460-26-00) и при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Субсидии на выполнение программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований» (дополнительное соглашение от 20 февраля 2026 г. № 075-02-2026-1336).

решение с двухфазной зоной, в каждой точке которой присутствуют жидкая и твердая фазы.

Предлагаемый метод позволяет рассмотреть условие Стефана с величиной L , например, вида $L(s(t), s'(t))$. Этот случай рассмотрен в [9, 10] для задачи без начального условия, где строятся явные решения. В [11] рассмотрен случай, когда L может зависеть от $s(t)$, но в задаче жидкая фаза формируется без начального условия благодаря ненулевому потоку, входящему через заданную границу.

В [4] в задаче с L , зависящей от $s(t)$, рассмотрены гладкие начальные условия, при которых искомая граница $s(t)$ принадлежит C^k , $k \geq 1$. В [12–14] исследованы некоторые задачи со свободными границами с условиями другого типа на искомой границе.

Основная цель исследования — доказать существование и единственность в задаче Стефана для нелинейного уравнения с коэффициентом скрытой удельной теплоты, зависящим от глубины зоны протаивания и при начальном условии из W_2^1 , при этом так, чтобы построенный итерационный процесс сходил к этому решению.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача с неизвестной границей $x = s(t)$ ($s(0) = 1$) для уравнения

$$u_t = a(u)u_{xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t \in (0, T). \quad (1)$$

Уравнение (1) дополняется начальным условием, допускающим наличие «шуги»:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_0 \geq 0, \quad u_0 \in W_2^1, \quad u_0(1) = 0. \quad (2)$$

$$(A(u))_x = a(u)u_x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad t \in (0, T), \quad \text{где } A(u) \text{ — первообразная для } a(u). \quad (3)$$

На неизвестной границе $x = s(t)$ задается температура фазового перехода

$$u = 0 \quad \text{при } x = s(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

а также условие Стефана

$$a(u)u_x = -Ls'(t) \quad \text{при } x = s(t), \quad t > 0. \quad (5)$$

В отличие от обычного условия Стефана, в котором $L = \text{const}$, у нас $L = \varphi(s)$.

Уравнение (1) можно записать в виде нелинейного по производной:

$$u_t = (A(u))_{xx} - a'(u)(u_x)^2 \quad \text{при } t > 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t \in (0, T), \quad s(0) = 1. \quad (6)$$

Будем предполагать, что функции $a'(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ непрерывны, а также что

$$a(\xi) \geq \delta_a, \quad \xi a'(\xi) \geq 0, \quad \varphi(\xi) \geq \delta_\varphi > 0. \quad (7)$$

Используя (4), уравнение (5) после интегрирования по t запишем в виде

$$\int_0^t (\Phi(s(\tau)))' d\tau = -a(0) \int_0^t u_x(s(\tau), \tau) d\tau, \quad t \in (0, T], \quad \text{где } \Phi(\eta) = \int_0^\eta \varphi(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Задачи (1)–(5) и (1)–(4), (8) эквивалентны, (8) эквивалентно соотношению

$$\Phi(s(t)) = \Phi(s(0)) - a(0) \left[\int_0^{s(t)} B(u(\xi, t)) d\xi - \int_0^{s(0)} B(u_0(\xi)) d\xi \right], \quad (9)$$

$$B(u) = \int_0^u \frac{d\eta}{a(\eta)}.$$

Оно получается, если в (8) выразить $u_x(s(t), t)$ через $\int_0^{s(t)} u_{xx}(\xi, t) d\xi$, заменить u_{xx} на $\frac{u_t}{a(u)}$ и проинтегрировать по t , используя (2) и (4).

2. Краевая задача в заданной нецилиндрической области

Пусть $s(t)$ — заданная функция из класса $W_2^1(0, T)$ такая, что $\frac{d}{dt}s(t) \geq 0$, $s(0) = 1$. По $s(t)$ определим функцию $u(x, t)$ как решение задачи (10), (2)–(4):

$$u_t = (A(u))_{xx} - a'(u)(u_x)^2, \quad (x, t) \in Q_T^s = \{(x, t) : 0 < x < s(t), t \in (0, T)\}. \quad (10)$$

Ее разрешимость в рассматриваемом классе, даже когда $a(u) \equiv 1$, не следует из известных работ [15–19] и др., так как здесь ограничения на гладкость границы $x = s(t)$ и начальную функцию $u_0(x)$ более слабые. Эта задача исследовалась в [1]. Приведем необходимые нам для дальнейшего результаты из [1].

Теорема 1. Пусть заданы $u_0 \in W_2^1(0, 1)$ такая, что $u_0(x) \geq 0$, $u_0(1) = 0$; функция $s \in W_2^1(0, T)$, для которой $\frac{ds}{dt} \geq 0$ п.в. и $s(0) = 1$; функция $a \geq \delta_a > 0$ с непрерывной a' и $a'(u)u \geq 0$, и пусть задано $T < \infty$. Тогда задача (10), (2)–(4) имеет решение из класса $W_2^1(Q_T^s) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(0, s(t))) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, s(t)))$ и выполнены оценки

$$\int_0^{s(t)} u^2 dx + 2 \int_0^t \int_0^{s(\tau)} [a(u) + a'(u)u] u_x^2 dx d\tau \leq \int_0^1 u_0^2 dx = c_0^2, \quad (11)$$

$$\int_0^{s(t)} u_x^2 dx + \int_0^t u_x^2(s(\tau), \tau) s'(\tau) d\tau + 2\delta_a \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_{xx}^2 dx d\tau \leq \int_0^1 u_{0x}^2(x) dx = c_1^2, \quad (12)$$

$$\int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_t^2 dx d\tau \leq \tilde{c} \left(\int_0^T s'^2(\tau) d\tau + 1 \right), \quad (13)$$

$$u_x^4(x, t) = \left(\int_0^x \frac{\partial u_x^2(x, t)}{\partial x} dx \right)^2 \leq 4 \int_0^x u_x^2 dx \int_0^x u_{xx}^2 dx \leq 4c_1^2 \int_0^x u_{xx}^2 dx, \quad (14)$$

$$|u(x, t)|^2 = 2 \left| \int_{s(t)}^x u(\xi, t) u_x(\xi, t) d\xi \right| \leq 2c_0 c_1. \quad (15)$$

Аналогично [20] выводится, что решение этой задачи неотрицательно в Q_T^s . Поэтому $u_x^n(s(t), t) \leq 0$ п.в. на $(0, T)$.

Из (11)–(15) и вложения $(W_2^1(Q_T^s) \cap L_\infty(0, T; \widetilde{W}_2^1(0, s(t)))) \subset C_{x,t}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\overline{Q}_T^s)$ (волна над W_2^1 означает, что $u(s(t), t) = 0$), установленного в [21], следует, что $u(x, t) \in C_{x,t}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\overline{Q}_T^s)$.

По теореме 1 и следствию 2 каждой $s(t)$ соответствует единственное решение $u = u(x, t; s)$. Поэтому для задачи Стефана (1)–(5) из (9) определяется оператор G :

$$G(s)(t) = \Phi^{-1} \left(\alpha - a(0) \int_0^{s(t)} B(u(\xi, t)) d\xi \right), \quad B(u) = \int_0^u \frac{d\eta}{a(\eta)}, \quad (16)$$

$$\alpha = \Phi(1) + a(0) \int_0^1 B(u_0(\xi)) d\xi,$$

где $u = u(x, t; s)$. Из (9) видно, что неподвижная точка $s(t)$ оператора G и функция u , построенная по ней как решение (10), (2)–(4), даст решение задачи Стефана (1)–(5).

Определим подмножество S пространства $C[0, T]$, $S = \{s(t) \in W_2^1(0, T) : s(0) = 1, s'(t) \geq 0, \|s'\|_{L_2(0, T)} \leq b_1\}$, где

$$b_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a(0)}{\delta_\varphi} c_1 \left(\frac{2T}{\delta_a} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

В [1] установлена

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, функция $\varphi(s)$ непрерывна и $\varphi(s) \geq \delta_\varphi > 0$ при $1 \leq s \leq 1 + b_1 \sqrt{T}$, а $\sup |a''(u)|$ ограничен при $0 \leq u \leq \sqrt{2c_0 c_1}$. Тогда оператор $G : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ с областью определения S непрерывен на S , переводит S в S , при этом

$$\max_{0 \leq t \leq T} |G(s_1)(t) - G(s_2)(t)| \leq c \max_{0 \leq t \leq T} |s_1(t) - s_2(t)|^{\frac{1}{4}}.$$

Для заданного T и $s \in S$ имеем

$$s(t) = 1 + \int_0^t s'(\tau) d\tau \leq 1 + b_1 \sqrt{T} \stackrel{\text{def}}{=} c_2.$$

Обозначим $\widetilde{Q}_T = [0, T] \times [0, c_2]$. Тогда решения $u(x, t; s)$ задачи (10), (2)–(4), продолженные нулем за кривую $x = s(t)$, будут принадлежать пространству $L_\infty(0, T; W_2^1(0, b_2)) \cap C^{\frac{1}{4}}(\widetilde{Q}_T)$. Указанные продолжения обозначим через $U = U(x, t; s)$. Из теоремы 2 в [1] получены

Следствие 1. При предположениях теоремы 2 оператор, ставящий каждой функции $s(t) \in S$ решение краевой задачи (10)–(13), непрерывен как оператор из $C[0, T]$ в $C[\tilde{Q}_T]$. При этом имеет место квалифицированная непрерывность:

$$\|U(x, t; s_1) - U(x, t; s_2)\|_{C(\tilde{Q}_T)} \leq c \|s_1 - s_2\|_{C[0, T]}^{\frac{1}{8}}. \quad (17)$$

Следствие 2. При предположениях теоремы 2 задача (10), (2)–(4) в классе функций теоремы 1 имеет единственное решение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда задача Стефана (1)–(5) имеет решение $(s(t), u(x, t))$ такое, что $s \in W_4^1(0, T)$, $u \in W_2^1(Q_T^s) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(0, s(t))) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, s(t))) \cap C_{x,t}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\overline{Q}_T^s)$.

Лемма 1 (см. [15, лемма 3.4, с. 98]). Справедлива оценка вложения

$$\|v(x, 0)\|_{q, (0, 1)}^{(2 - \frac{2}{q})} \leq c \|v\|_{q, Q_T^1}^{2, 1}, \quad q > 1, \quad Q_T^1 = (0, 1) \times (0, T). \quad (18)$$

3. О предельном переходе по итерациям в задаче Стефана

Построим итерации. Если s^n построена, по теореме 1 и следствию 2 строим $u^n(x, t)$. По $u^n(x, t)$ определяем $s^{n+1}(t) = G(s^n)$ в соответствии с формулой (16). Из уравнения для u^n , используя (8), получим тождество для любой $f \in C(\tilde{Q}_T)$ с $f_x \in L_2(\tilde{Q}_T)$:

$$\int_{Q_T^{s^n}} (u_t^n f + a(u^n) u_x^n f_x + a'(u^n) u_x^{n2} f) dx dt + \int_0^T \frac{d\Phi(s^{n+1})}{dt} f(s^n(t), t) dt.$$

Из (11), (12), (14), (15) следуют равномерные оценки для u^n , u_x^n , u_{xx}^n . Функция $u^n(x, t; s^n)$ удовлетворяет уравнению (1), поэтому u_t^n выражается через $a(u^n) u_{xx}^n$. Следовательно, получим равномерную ограниченность u_t^n в $L_2(Q_T^{s^n})$:

$$\|u_t^n(x, t; s^n)\|_{L_2(Q_T^{s^n})}^2 \leq a^2(2c_0 c_1) \|u_{xx}^n\|_{L_2(Q_T^{s^n})}^2 \leq a^2(\sqrt{2c_0 c_1}) \frac{c_1^2}{2\delta_a}. \quad (19)$$

В работе [20] при этих же условиях на s^n установлено, что если функции u^n продолжить нулем при $x > s^n(t)$, обозначив продолжение через U^n , то последние будут принадлежать классу $W_2^1(\tilde{Q}_T) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(0, c_2)) \cap C_{x,t}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\tilde{Q}_T)$ с сохранением соответствующих равномерных оценок и тождество с f можно переписать в виде

$$\int_{\tilde{Q}_T} (U_t^n f + a(U^n) U_x^n f_x + a'(U^n) U_x^{n2} f) dx dt + \int_0^T \frac{d\Phi(s^{n+1})}{dt} f(s^n(t), t) dt. \quad (20)$$

А в [22] установлено, что если имеется сходимость $s^n(t) \rightarrow s(t) \forall t$, то для всех $1 \leq q_0 < 2$ множество $\{U^n, n \in N\}$ ($U^n = u^n$ при $x \leq s^n$ и для u^n выполнены равномерные оценки (11), (12), (19) с $s = s^n$) относительно компактно в

пространстве $L_{q_0}(0, T; W_{q_0}^1(0, c_2)) \cap C(\tilde{Q}_T)$. Это позволяет, выбрав подпоследовательность, перейти к пределу в интегралах по $\tilde{Q}_T$ в тождестве (20). Однако даже если иметь сходимости s^{n_k} и U^{n_k} , последовательность s^{n_k+1} (входящая в последний интеграл тождества (20)) может не сходиться или сходиться не к тому пределу. Этого не произойдет при сходимости всей последовательности s^n . Из предельного тождества будет следовать, что уравнение (1) удовлетворяется п.в. и выполнено условие (5), т. е. соответствующая пределам пара $(u(x, t), s(t))$ будет решением задачи (1)–(5). Далее будут найдены условия, при которых сходимость всей последовательности s^n гарантирована.

4. Оператор G и его свойства

Пусть G — оператор, действующий на функции из метрического пространства $S = \{s(t) \in W_2^1(0, T) : s(0) = 1, s'(t) \geq 0 \text{ п.в.}, \|s'\|_{L_2(0, T)} \leq b_1\}$ с метрикой $\rho(s_1, s_2) = \|s'_1 - s'_2\|_{L_2(0, T)}$. Установим полноту $\langle S, \rho \rangle$, что G переводит S в S и является сжатием.

Аналогично если определим G на пространстве $S_q = \{s(t) \in W_q^1(0, T) : s(0) = 1, s'(t) \geq 0, \|s'(t)\|_{L_q} \leq b_q\}$ с метрикой $\rho_q(s_1, s_2) = \|s'_1(t) - s'_2(t)\|_{L_q}$, то увидим, что при $u_0 \in W_q^{(2-\frac{2}{q})}(0, 1)$, $q > 3$, он переводит S_q в S_q и при малых T является сжимающим.

В силу полноты пространств $\langle S, \rho \rangle$, $\langle S_q, \rho_q \rangle$ любая подпоследовательность последовательности $\{s^n(t)\}$ будет также сходиться к неподвижной точке оператора G .

Лемма 2. *Метрические пространства $\langle S, \rho \rangle$, $\langle S_q, \rho_q \rangle$ полные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{s_n\} \subset S_q$ фундаментальная в метрике $\langle S_q, \rho_q \rangle$. Из полноты $W_q^1(0, T)$ и $C([0, T])$ и компактности вложения $W_q^1(0, T) \subseteq C([0, T])$ следует существование такого элемента $s \in W_q^1(0, T) \cap C([0, T])$, что $s_n \rightarrow s$ в $C([0, T])$ (и поэтому $s(0) = 1$), $s'_n \rightarrow s'$ в $L_q(0, T)$, $\|s'\|_{L_q} \leq b_q$. По лемме 3.1 из [22, с. 80] существует s'_{n_k} такая, что $s'_{n_k}(t) \rightarrow s'(t)$ п.в. А так как $s'_{n_k} \geq 0$ п.в., то $s' \geq 0$ п.в.

Установим, что G переводит S в S при $u_0 \in W_2^1$, $u_0(1) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dG(s)(t)}{dt} &= \frac{1}{\Phi'(G(s)(t))} \left(-a(0)^{s(t)} \frac{d}{dt} B(u(\xi, t)) d\xi \right) = \frac{-a(0)}{\Phi'(G(s)(t))} \int_0^{s(t)} \frac{u_t}{a(u)} d\xi \\ &= -\frac{a(0)}{\Phi'(G(s)(t))} \int_0^{s(t)} u_{xx} d\xi = -\frac{a(0)}{\varphi(G(s)(t))} u_x(s(t), t) \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В частности,

$$\frac{dG(s)(t)}{dt} = \frac{a(0)}{\varphi(G(s)(t))} |u_x(s(t), t)| \leq \frac{a(0)}{\delta_\varphi} |u_x(s(t), t)|.$$

Оценим $u_x(s(t), t)$:

$$u_x^4(s(t), t) = \left(2 \int_0^{s(t)} u_x u_{xx} d\xi \right)^2 \leq 4 \int_0^{s(t)} u_x^2 d\xi \int_0^{s(t)} u_{xx}^2 d\xi \leq 4c_1^2 \int_0^{s(t)} u_{xx}^2 d\xi. \quad (22)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \frac{dG(s)(t)}{dt} \right|^2 dt &\leq \left(\frac{a(0)}{\delta_\varphi} \right)^2 2c_1 \left(\int_0^T \int_0^{s(t)} u_{xx}^2 d\xi dt \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{T} \\ &\leq \left(\frac{a(0)c_1}{\delta_\varphi} \right)^2 \sqrt{\frac{2T}{\delta_a}} \stackrel{def}{=} b_1^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Постоянная b_1 не зависит от $s(t)$ и именно она входит в определение множества S .

Формулы (16), (20), (22) и равенство $G(s)(0) = \Phi^{-1}(\Phi(1)) = 1$ показывают, что оператор G переводит S в себя. Докажем, что он является оператором сжатия на S в метрике $\rho(s_1, s_2) = \|s'_1 - s'_2\|_{L_2(0,T)}$, если величина $\|u_{0x}\|_{L_2} \stackrel{def}{=} c_1$ достаточно маленькая. Делая замену переменной и функции

$$y = \frac{x}{s(t)}, \quad u(x, t; s) = v(y, t; s), \quad u_x = \frac{v_y}{s(t)}, \quad u_t = v_t - y \frac{s'(t)}{s(t)} v_y,$$

получим задачу для v в прямоугольнике $Q_T^1 = (0, 1) \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} v_t - \frac{a(v)}{s^2(t)} v_{yy} - \frac{ys'(t)}{s(t)} v_y &= 0, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t < T, \\ v(y, 0) &= u_0(y), \quad 0 < y < 1, \quad v_y(0, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad v(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (24)$$

но лишь с суммируемым коэффициентом при v_y . После преобразований разность уравнений для $v_1 = v(y, t; s_1)$ и $v_2 = v(y, t; s_2)$ приведем к уравнению для $\omega = v_1 - v_2$:

$$\begin{aligned} \omega_t - \frac{a(v_1)}{s_1^2} \omega_{yy} - \frac{ys'_1}{s_1} \omega_y - \frac{a'(\tilde{v})v_2 v_{yy}}{s_1^2} \omega &= \frac{a(v_2)(s_1 + s_2)v_2 v_{yy}}{s_1^2 s_2^2} (s_2 - s_1) \\ &+ \frac{s'_2 y v_2 v_{yy}}{s_1 s_2} (s_2 - s_1) + \frac{y v_2 v_{yy}}{s_1} (s'_1 - s'_2) = I_1 + I_2 + I_3 = f, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\tilde{v}$ лежит между v_1 и v_2 . При этом ω удовлетворяет однородным граничным и начальным условиям. Коэффициент при ω_{yy} больше $2\delta_1 = \frac{\delta_a}{(1+b_2\sqrt{T})^2}$ и непрерывен. Коэффициент при ω_y принадлежит $L_2(Q_T^1)$. Коэффициент при ω , т. е. $-\frac{a'(\tilde{v})v_2 v_{yy}}{s_1^2}$, в силу полученных для $u(x, t; s_2)$ оценок принадлежит пространству $L_2(Q_T^1)$.

Автор не знает подходящей ссылки по оценкам решений линейных параболических уравнений с разрывными коэффициентами и не знает, есть она или ее

нет, поэтому, не претендуя на новизну, на основе стандартных выкладок ниже предлагается вывод необходимых оценок.

Итак, для получения оценок для ω через правую часть уравнения умножим равенство (25) на $-\omega_{yy}$, проинтегрируем по y и оценим величины справа — сверху, а слева — снизу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_y^2 dy + 2\delta_1 \int_0^1 \omega_{yy}^2 dy + \frac{s'_1}{2s_1} \omega_y^2(1, t) \\ \leq \frac{s'_1}{2s_1} \int_0^1 \omega_y^2 dy + K \int_0^1 |v_{2yy}| |\omega| |\omega_{yy}| dy + \int_0^1 |f \omega_{yy}| dy, \end{aligned}$$

$$K = \max\left(\max_{0 \leq v \leq \sqrt{2c_0 c_1}} a'(v), \max_{0 \leq v \leq \sqrt{2c_0 c_1}} a(v)\right), \quad \delta_1 = \frac{\delta_a}{2(1 + b_2 \sqrt{T})^2}.$$

Оценим второй интеграл справа:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |v_{2yy} \omega \omega_{yy}| dy &\leq \max_{0 \leq y \leq 1} |\omega(y, t)| \left(\int_0^1 v_{2yy}^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \omega_{yy}^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(\varepsilon) \max_{0 \leq y \leq 1} |\omega(y, t)|^2 \int_0^1 v_{2yy}^2 dy + \varepsilon \int_0^1 \omega_{yy}^2 dy \\ &\leq c(\varepsilon) \int_0^1 \omega_y^2 dy \int_0^1 v_{2yy}^2 dy + \varepsilon \int_0^1 \omega_{yy}^2 dy, \quad \varepsilon = \frac{\delta_1}{K}. \end{aligned}$$

Стандартно оценивается третий справа:

$$\left| \int_0^1 f \omega_{yy} dy \right| \leq c(\delta_1) \int_0^1 f^2 dy + \frac{\delta_1}{2} \int_0^1 \omega_{yy}^2 dy.$$

Поэтому, перенося влево интегралы с ω_{yy} , получим неравенство

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_y^2 dy + \delta_1 \int_0^1 \omega_{yy}^2 dy \leq s'_1 \int_0^1 \omega_y^2 dy + c \int_0^1 \omega_y^2 dy \int_0^1 v_{2yy}^2 dy + c \int_0^1 f^2 dy. \quad (26)$$

Для дальнейшего отметим, что согласно лемме 1 $v_{iy}(y, 0) \in L_2(0, 1)$. Поэтому $\omega_y(y, 0) \in L_2(0, 1)$ и

$$\int_0^1 \omega_y^2(y, 0) dy = 0.$$

Для $z = \int_0^1 \omega_y^2 dy$ получим

$$z' \leq \left(s'_1 + c \int_0^1 v_{2yy}^2 dy \right) z + c \|f\|_{Q_t}^2.$$

Используя лемму 5.5 из [15, с. 112] и неубывание по t величины $\|f\|_{2,Q_t}^2$, выводим

$$\int_0^1 \omega_y^2(y, t) dy \leq c \exp \left(s_1(t) + 1 + c \int_0^t \int_0^1 v_{2yy}^2 dy d\tau \right) \int_0^t \|f\|_{2,Q_\tau}^2 d\tau \leq tc(T) \|f\|_{2,Q_t}^2.$$

Подстановка в (26), интегрирование и монотонность $\|f\|_{2,Q_\tau}$ по τ дает

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega_y^2 dy + \delta_1 \int_0^t \int_0^1 \omega_{yy}^2 dy \\ \leq c(T) \int_0^t \left(s_1'(\tau) + c \int_0^1 v_{2yy}^2 dy \right) \tau \|f\|_{2,Q_\tau}^2 d\tau + c \|f\|_{2,Q_t}^2 \leq c \|f\|_{2,Q_t}^2. \end{aligned}$$

Учитывая оценки для v_{2y} , v_{2yy} , вытекающие из оценок для u_{2x} , u_{2xx} , получим

$$\int_0^t \int_0^1 I_1^2 dy d\tau \leq c \int_0^t \int_0^1 |v_{2yy}|^2 dy d\tau \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|^2 \leq cc_1^2 t \int_0^t |s_1' - s_2'|^2 d\tau,$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 I_2^2 dy d\tau &\leq \int_0^t \int_0^1 |v_{2y}|^2 dy |s_2'|^2 d\tau \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|^2 \\ &\leq c_1^2 t (1 + b_2 \sqrt{t}) b_2 \int_0^t |s_1' - s_2'|^2 d\tau, \end{aligned}$$

$$\int_0^t \int_0^1 I_3^2 dy d\tau \leq \int_0^t \int_0^1 |v_{2y}|^2 dy |s_1'(\tau) - s_2'(\tau)|^2 d\tau \leq c_1^2 (1 + b_2 \sqrt{t}) \int_0^t |s_1' - s_2'|^2 d\tau.$$

В двух последних неравенствах использована оценка (12):

$$\int_0^{s_2(t)} u_x^2(x, t; s_2) dx \leq c_1^2.$$

Таким образом, выведено, что

$$\|\omega_{yy}\|_{L_2(Q_t)} \leq cc_1 \|s_1' - s_2'\|_{L_2(0,T)}, \quad \text{где } c_1 = \|u_{0x}\|_{L_2}. \quad (27)$$

Теперь можно доказать теорему.

Теорема 4. Для любого фиксированного $T < \infty$ оператор G с метрикой $\|s_1' - s_2'\|_{L_2(0,T)}$ при малой величине $c_1 = \|u_{0x}\|_{L_2(0,1)}$ является сжимающим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $s_1(t)$ и $s_2(t)$ из множества S и соответствующих им u_1 , v_1 и u_2 , v_2 , получим

$$\left| \frac{d}{dt} G(s_1) - \frac{d}{dt} G(s_2) \right| = \left| \frac{a(0)}{\varphi(G(s_2)(t))s_2(t)} v_{2y}(1, t) - \frac{a(0)}{\varphi(G(s_1)(t))s_1(t)} v_{1y}(1, t) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| a(0) \frac{v_{2y}(1, t) - v_{1y}(1, t)}{\varphi(G(s_2))s_2} + a(0)v_{1y}(1, t) \left(\frac{1}{\varphi(G(s_2))s_2} - \frac{1}{\varphi(G(s_1))s_1} \right) \right| \\
&\leq \left| \frac{a(0)}{\delta_\varphi} (v_{2y}(1, t) - v_{1y}(1, t)) \right| + a(0)|v_{1y}(1, t)| \left| \frac{\varphi(G(s_1))s_1 - \varphi(G(s_2))s_2}{\varphi(G(s_1))s_1\varphi(G(s_2))s_2} \right|. \quad (*)
\end{aligned}$$

Оценим числитель последней дроби. Так как $G(s)(t)|_{t=0} = 1$, а из (21) $\frac{dG}{dt} \geq 0$, то $G(s)(t) \geq 1$. Из (23) имеем

$$|G(s)(t) - 1| = \left| \int_0^t \frac{d}{d\tau} G(s)(\tau) d\tau \right| \leq t^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{dG(s)}{dt} \right\|_{L_2(0, t)} \leq t^{\frac{1}{2}} b_1.$$

Поэтому $1 \leq G(s)(t) \leq 1 + t^{\frac{1}{2}} b_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
|\varphi(G(s_1))s_1 - \varphi(G(s_2))s_2| &= |\varphi(G(s_1))(s_1 - s_2) + s_2(\varphi(G(s_1)) - \varphi(G(s_2)))| \\
&= |\varphi(G(s_1))(s_1 - s_2) + s_2\varphi'(\tilde{G})(s_1 - s_2)| \leq \tilde{K}(1 + s_2)|s_1 - s_2|,
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{K} = \tilde{K}(t) = \max\left(\max_{1 \leq \tilde{G} \leq 1+t^{\frac{1}{2}}b_1} \varphi(\tilde{G}), \max_{1 \leq \tilde{G} \leq 1+t^{\frac{1}{2}}b_1} \varphi'(\tilde{G})\right).$$

Продолжим неравенство (*), обозначая $\omega = v_2 - v_1$:

$$\leq \frac{a(0)}{\delta_\varphi} |\omega_y(1, t)| + \frac{a(0)2\tilde{K}}{\delta_\varphi^2} |v_{1y}(1, t)| |s_1(t) - s_2(t)|. \quad (28)$$

Оценим множитель $v_{1y}(1, t)$:

$$\begin{aligned}
|v_{1y}(1, t)|^2 &= s_1^2(t) u_{1x}^2(s_1(t), t) = 2s_1^2(t) \int_0^{s(t)} u_{1x} u_{1xx} dx \\
&\leq 2s_1^2(t) \left(\max_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^{s(\tau)} u_{1x}^2(x, \tau) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{s(t)} u_{1xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2(1 + b_1 t^{\frac{1}{2}})^2 c_1 \|u_{1xx}\|_{L_2(0, s(t))}. \quad (29)
\end{aligned}$$

В итоге, используя представление

$$\omega_y(1, t) = \int_0^1 \omega_{yy} dy$$

и оценки (27)–(29), получим

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} G(s_1) - \frac{d}{d\tau} G(s_2) \right|^2 d\tau &\leq 2 \left(\frac{a(0)}{\delta_\varphi} \right)^2 \int_0^t \int_0^1 |\omega_{yy}(y, \tau)|^2 dy d\tau \\
&\quad + cc_1 \int_0^t \|u_{1xx}\|_{L_2(0, s(\tau))} d\tau \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|^2 \\
&\leq cc_1^2 \|s'_1 - s'_2\|_{L_2(0, t)}^2 + cc_1^2 t^{\frac{3}{2}} \|s'_1 - s'_2\|_{L_2(0, t)}^2,
\end{aligned}$$

т. е. для любого заданного T при малых c_1 оператор G сжимающий на S .

Следствие 3. При условиях теоремы 4 итерационный процесс $s^{n+1} = G(s^n)$, сходится к единственной неподвижной точке s оператора G . При этом $s \in W_4^1(0, T)$.

Мы не можем в полной мере использовать результаты теоремы 9.1 из [15]. В ней оценки относятся либо к первой краевой задаче, либо к второй (третьей) краевым задачам. У нас рассматривается случай, когда на одной части границы (при $y = 0$) задается краевое условие второго рода, а на другой (при $y = 1$) — первого. Однако имеется результат о локальных оценках для каждой из краевых задач. Используя оценки теоремы 10.1 из [15, гл. IV, с. 404], докажем следующий результат.

Лемма 3. Для решения однородной задачи для уравнения (25) при $q > 3$ выполнены оценки (в обозначениях Ладженской)

$$\|\omega\|_{q, Q_T^1}^{(2)} \leq \tilde{c} \|f\|_{q, Q_T^1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения: $\Omega_1' = (0, \frac{2}{3})$, $\Omega_1'' = (0, \frac{3}{4})$, $Q_1' = \Omega_1' \times (0, T)$, $Q_1'' = \Omega_1'' \times (0, T)$; $\Omega_2' = (\frac{1}{3}, 1)$, $\Omega_2'' = (\frac{1}{4}, 1)$, $Q_2' = \Omega_2' \times (0, T)$, $Q_2'' = \Omega_2'' \times (0, T)$.

В силу неравенства [15, с. 404] и однородного начального условия и однородного условия второй краевой задачи при $y = 0$, взяв $\tilde{q} = 2$, получим

$$\|\omega\|_{q, Q_1'}^{(2)} \leq c(\|f\|_{q, Q_1''} + \|\omega\|_{2, Q_1''}).$$

Аналогично для однородного краевого условия первого рода при $y = 1$ имеем

$$\|\omega\|_{q, Q_2'}^{(2)} \leq c(\|f\|_{q, Q_2''} + \|\omega\|_{2, Q_2''}).$$

Так как $Q_1' \cup Q_2' = Q_T^1$, $Q_1'' \cup Q_2'' = Q_T^1$, сложение дает

$$\|\omega\|_{q, Q_T^1}^{(2)} \leq c(\|f\|_{q, Q_T^1} + \|\omega\|_{2, Q_T^1}).$$

Согласно выведенной ранее оценке $\|\omega_y\|_{2, Q_T^1} \leq c\|f\|_{2, Q_T^1} \leq c\|f\|_{q, Q_T^1}$, $q > 3$, и так как $\|\omega\|_{2, Q_T^1} \leq \|\omega_y\|_{2, Q_T^1}$, получим окончательную оценку

$$\|\omega\|_{q, Q_T^1}^{(2)} \leq c\|f\|_{q, Q_T^1}. \quad (30)$$

Теорема 5. Если функция u_0 принадлежит пространству $W_q^{2-\frac{2}{q}}(0, 1)$, $3 < q \leq 4$, или пространству $C^{1+\alpha}$, $\alpha = 1 - \frac{3}{q}$, выполнено условие согласования $u_0(1) = 0$, $u_{0x}(0) = 0$, а $s \in W_q^1(0, T)$, то $G(s) \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0, T])$, $\alpha = 1 - \frac{3}{q}$. Оператор G при достаточно малых T является оператором сжатия в метрическом пространстве S_q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (16), (21) получим $G(s)(0) = 1$, $\frac{dG(s)}{dt}(t) \geq 0$,

$$\left\| \frac{dG(s)}{dt} \right\|_{L_q(0, T)}^q \leq \left| \frac{a(0)c_1}{\delta_\varphi} \right|^q \left(\frac{2}{\delta_a} \right)^{\frac{q}{4}} T^{\frac{4-q}{4}} = b_q^q, \quad 3 < q \leq 4.$$

Постоянная b_q не зависит от $s(t)$ и именно она входит в определение множества S_q . Поэтому G переводит полное метрическое пространство S_q с метрикой $\rho(s_1, s_2) = \|s'_1 - s'_2\|_{L_q}$ в себя.

Из принадлежности u_0 пространству $W_q^{2-\frac{2}{q}}$, $q > 3$, вложения (18) леммы 1 и леммы 3.3 из [15, с. 95] следует, что $u_{0x}(x) \in C^\alpha$, $\alpha = 1 - \frac{3}{q}$. Так как $s \in W_q^1$, то $s \in C^\beta([0, T])$, $\beta = 1 - \frac{1}{q} \geq \frac{\alpha}{2}$. В силу единственности решения задачи (1)–(4) (следствие 2) из теоремы работы [19], примененной к уравнению (1) (линейном на найденном непрерывном решении задачи (1)–(4)), следует, что $u \in C_{x,t}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^s)$, $u_x \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^s)$. Из (16), принадлежности $s \in C^{\frac{2}{3}}[0, T]$, и гёльдеровости u по t с показателем $\frac{1+\alpha}{2}$ вытекает непрерывность (и гёльдеровость) функции $G(s)(t)$. Из (21), так как u_x удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{\alpha}{2}$, следует, что $\frac{d}{dt}G(s)(t) \in C^{\frac{\alpha}{2}}([0, T])$.

Итак, установлено, что $G(s) \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0, T])$. Для доказательства свойства сжатия применим выведенную выше гладкость $v_1 = v(y, t; s_1) = u(x, t; s_1)$ при указанных условиях на u_0 . Получим $\max_{\overline{Q}_T^1} |v_{1y}| \leq c$. Это даст оценку второго

слагаемого в (28). Согласно следствию к теореме 9.1 из [15, с. 389] при $2 - \frac{3}{q} > 1$ функция ω_y удовлетворяет условию Гёльдера по x и по t . Это же вытекает из гёльдеровости $v_{1y} - v_{2y}$. Тогда для $\lambda = 1 - \frac{3}{q}$ в обозначениях Ладыженской

$$\begin{aligned} |\omega_y(1, t)| &= \frac{|\omega_y(1, t) - \omega_y(0, t)|(1-0)^\lambda}{(1-0)^\lambda} \\ &\leq \sup_{(y,t), (y_1,t) \in \overline{Q}_T^1} \frac{|\omega_y(y, t) - \omega_y(y_1, t)||y - y_1|^\lambda}{|y - y_1|^\lambda} \\ &\leq 2^\lambda \langle \omega_y \rangle_{y, Q_T^1}^{(\lambda)} \leq c \|\omega\|_{q, Q_T^1}^{(2)} + \tilde{c} \|\omega\|_{q, Q_T^1} \leq (c + \tilde{c}) \|\omega\|_{q, Q_T^1}^{(2)}. \end{aligned}$$

Оценку $\langle \omega_y \rangle_{y, Q_T^1}^{(\lambda)}$ дает лемма 3.3 из [15, с. 95]. Привлекая оценку из леммы 3 ($q > 3$) и продолжая предыдущее неравенство, получим, что

$$|\omega_y(1, t)| \leq c \|f\|_{q, Q_T^1}, \quad f = I_1 + I_2 + I_3.$$

Это дает оценку первого слагаемого в (28). В результате имеем

$$\left| \frac{d}{dt}G(s_1)(t) - \frac{d}{dt}G(s_2)(t) \right| \leq c \|f\|_{q, Q_T} + c |s_1(t) - s_2(t)|. \quad (31)$$

Оценим норму f :

$$\begin{aligned} \|I_1\|_q &\leq c \|v_{2yy}\|_q \max |s_1(t) - s_2(t)|, \quad \|I_2\|_q \leq c \|s'_2\|_q \max |s_1(t) - s_2(t)|, \\ \|I_3\|_q &\leq c \|s'_1 - s'_2\|_q. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left| \frac{d}{dt}G(s_1) - \frac{d}{dt}G(s_2) \right| \leq c \max_{0 \leq t \leq T} |s_1(t) - s_2(t)| + c \|s'_1 - s'_2\|_{L_q(0, T)} \leq c \|s'_1 - s'_2\|_{L_q(0, T)}.$$

Интегрируя по t , получим

$$\left\| \frac{d}{dt}G(s_1) - \frac{d}{dt}G(s_2) \right\|_{L_q(0, T)} \leq cT \|s'_1 - s'_2\|_{L_q(0, T)}. \quad (32)$$

Следовательно, при малых T оператор G сжимающий. Теорема доказана.

Следствие 4. При условиях теоремы 5 итерационный процесс $s^{n+1} = G(s_n)$ сходится к единственной неподвижной точке оператора G .

По подсказке рецензента разрешимость задачи можно получить глобально по времени и без предположения о малости $\|u_{0x}\|_{L_2(0,1)}$, если рассматривать условие сжатия оператора G в пространстве с метрикой

$$\rho_\gamma^2(s_1, s_2) = \int_0^T \exp(-\gamma t) |s_1(t) - s_2(t)|^2 dt.$$

Установим этот факт. Для этого вначале получим соответствующие весовые оценки для решения уравнения (25) и (24). Они получаются по той же схеме, что и оценки (26) и (27), только умножать уравнения надо соответственно на $\exp(-\gamma t)\omega_{yy}$ и на $\exp(-\gamma t)v_{yy}$. Тогда аналогом оценки (26) будет оценка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\exp(-\gamma t) \int_0^1 \omega_y^2 dy \right) + \gamma \exp(-\gamma t) \int_0^1 \omega_y^2 dy + \delta_1 \exp(-\gamma t) \int_0^1 \omega_{yy}^2 dy \\ \leq \left(s'_1 + c \int_0^1 v_{2yy}^2 dy \right) \exp(-\gamma t) \int_0^1 \omega_y^2 dy + c \exp(-\gamma t) \int_0^1 f^2 dy. \end{aligned}$$

Из нее вначале получим оценку

$$\bar{z}(t) = \exp(-\gamma t) \int_0^1 \omega_y^2 dy \leq \hat{c} \int_0^t \exp(-\gamma \tau) \int_0^1 f^2 dy d\tau$$

и, интегрируя предыдущую, выведем

$$\bar{z}(t) + \gamma \int_0^t \bar{z}(\tau) d\tau + \delta_1 \int_0^t \exp(-\gamma \tau) \int_0^1 \omega_{yy}^2 dy d\tau \leq \tilde{c} \int_0^t \exp(-\gamma \tau) \int_0^1 f^2 dy d\tau.$$

Точно так же, используя уравнение для v_1 , выводится аналогичная оценка, но слагаемого с f не будет, вместо него появится постоянная от начального условия:

$$\tilde{z}(t) + \gamma \int_0^t \tilde{z}(\tau) d\tau + \delta_1 \int_0^t \exp(-\gamma \tau) \int_0^1 \omega_{yy}^2 dy d\tau \leq cc_1,$$

$$\tilde{z}(t) = \exp(-\gamma t) \int_0^1 |v_{1y}|^2 dy.$$

Таким образом,

$$\int_0^t z(\tau) d\tau \leq \frac{\tilde{c}}{\gamma} \int_0^t \exp(-\gamma \tau) \int_0^1 f^2 dy d\tau,$$

$$\int_0^t \exp(-\gamma\tau) \|\omega_{yy}\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau \leq \tilde{c} \int_0^t \exp(-\gamma\tau) \int_0^1 f^2 dy d\tau,$$

$$\int_0^t \tilde{z}(\tau) d\tau \leq \frac{c_1}{\gamma}, \quad \int_0^t \int_0^1 v_{1yy}^2 dy d\tau \leq \frac{c_1}{\delta_1}.$$

Используя неравенства

$$|\omega_y(1, t)|^2 \leq \sqrt{\gamma} \|\omega_y\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|\omega_{yy}\|_{L_2(0,1)}^2,$$

$$|v_{1y}(1, t)|^2 \leq \sqrt{\gamma} \|v_{1y}\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|v_{1yy}\|_{L_2(0,1)}^2$$

и (28), аналогично (29) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \exp(-\gamma\tau) \left| \frac{d}{dt} (G(s_1) - G(s_2)) \right|^2 d\tau \\ & \leq c\sqrt{\gamma} \int_0^t z(\tau) d\tau + c \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_0^t \exp(-\gamma\tau) \|\omega_{yy}\|_{L_2(0,1)}^2 d\tau \\ & + c \int_0^t \exp(-\gamma\tau) |v_{1y}(1, \tau)|^2 |s_1(\tau) - s_2(\tau)|^2 d\tau \leq 2 \frac{c\tilde{c}}{\sqrt{\gamma}} \int_0^t \exp(-\gamma\tau) \int_0^1 f^2 dy d\tau \\ & + \frac{c}{\sqrt{\gamma}} \max_{\tau \in [0, t]} (\exp(-\gamma\tau) |s_1(\tau) - s_2(\tau)|^2) \|v_{1y}\|_{L_\infty(0, T; L_2(0,1))} \|v_{1yy}\|_{L_2(Q_T)}. \end{aligned}$$

Оценим величину максимума:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp(-\gamma\tau) |s_1(\tau) - s_2(\tau)|^2 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp(-\gamma\tau) \left| \int_0^\tau (s'_1(\nu) - s'_2(\nu)) d\nu \right|^2 \\ &\leq \frac{t}{\sqrt{\gamma}} \int_0^\tau \exp(-\gamma\nu) |s'_1(\nu) - s'_2(\nu)|^2 d\nu \leq \frac{T}{\sqrt{\gamma}} \rho_\gamma^2(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Величины с f оцениваются аналогично. Оценим, например, величину с I_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_0^t \exp(-\gamma\tau) \int_0^1 I_1^2 dy d\tau &\leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \max_{\tau \in [0, t]} (\exp(-\gamma\tau) |s_1(\tau) - s_2(\tau)|^2) \int_0^t \int_0^1 v_{2yy}^2 dy d\tau \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{\gamma}} \max_{\tau \in [0, t]} \left(\exp(-\gamma\tau) \left| \int_0^\tau (s'_1(\nu) - s'_2(\nu)) d\nu \right|^2 \right) \\ &\leq \frac{ct}{\sqrt{\gamma}} \max_{\tau \in [0, t]} \int_0^\tau \exp(-\gamma\nu) |s'_1(\nu) - s'_2(\nu)|^2 d\nu. \end{aligned}$$

Итак,

$$\rho_\gamma^2(G(s_1), G(s_2)) \leq \frac{c}{\sqrt{\gamma}} \rho_\gamma^2(s_1, s_2).$$

Доказано, что в метрике ρ_γ оператор G при большом γ является сжимающим, поэтому имеет единственную неподвижную точку. Итерационный процесс $s^{n+1} = G(s^n)$ сходится не только в метрике ρ_γ , но и в метрике

$$\rho(s_1, s_2) = \left(\int_0^T |s'_1(t) - s'_2(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

так как $\rho(s_1, s_2) \leq \exp\left(\frac{\gamma T}{2}\right) \rho_\gamma(s_1, s_2)$. Это означает, что в уравнении для приближенных решений можно перейти к пределу.

5. Задача Стефана

Теорема 6. Пусть заданы $T < \infty$, функция $u_0 \in W_2^1(0, 1)$ с $u_0(x) \geq 0$, $u_0(1) = 0$, непрерывные функции a' и φ с $a \geq \delta_a > 0$, $ua'(u) \geq 0$, и $\varphi \geq \delta_\varphi$. Тогда если величина $\|u_{0x}\|_{L_2}$ достаточно мала, то задача (1)–(5) имеет решение (u, s) из класса

$$W_2^1(Q_T^s) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(0, s(t))) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, s(t))) \cap C_{x,t}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\overline{Q}_T^s) \times W_4^1(0, T),$$

а оператор G является сжимающим по метрике ρ . Если дополнительно $\sup |a''(u)|$ ограничен при $0 \leq u \leq 2c_0c_1$, то решение в этом классе единственно. Итерационный процесс $s^{n+1} = G(s^n)$, а U^n построена как решение задачи (1)–(4) при $s = s^n$ и продолжена нулем при $x > s^n(t)$, сходится к решению задачи (1)–(5) $(u(x, t; s), s(t))$, где $u(x, t) = U(x, t)$ при $x \leq s(t)$. В интегральном тождестве (20) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Теорема справедлива и без предположения малости u_{0x} при замене метрики ρ в условии сжатия оператора G на метрику ρ_γ .

Доказательство. Единственность. В рассматриваемом классе для двух решений задачи (u_1, s_1) и (u_2, s_2) функции s_1 и s_2 должны быть неподвижными точками оператора G . В силу (23) и независимости b_1 от выбора решений в этом классе они должны принадлежать метрическому пространству S . А так как G при малых $\|u_{0x}\|_{L_2}$ является сжимающим на S , то $s_1 = s_2$. По следствию 2 $u_1 = u_2$. Из единственности следует, что вся последовательность u_n сходится к u , а не ее подпоследовательность. Сходимость всей последовательности u_n следует также из оценки (17). Аналогично получим единственность и сходимость в случае метрики ρ_γ .

Существование. Неподвижная точка $s(t)$ оператора G вместе с соответствующей $u(x, t; s)$, построенной согласно теореме 1, будет решением задачи (1)–(5).

Поскольку

$$\max_{0 \leq t \leq T} |s^{n+1}(t) - s(t)| \leq \sqrt{t} \left\| \frac{d}{dt} (s^{n+1} - s) \right\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0,$$

как в метрике ρ , так и в метрике ρ_γ , то из непрерывности φ и f , сходимости $\frac{ds^{n+1}}{dt} \rightarrow s'$ в L_2 , следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi(s^{n+1}(t)) \frac{d(s^{n+1} - s)}{dt} f(s^n(t), t) dt \\ \leq c\sqrt{t} \left\| \frac{d(s^{n+1} - s)}{dt} \right\|_{L_2(0, T)} = c\sqrt{t} \rho(s^{n+1}, s) \rightarrow 0, \\ \int_0^t \varphi(s^{n+1}(t)) \frac{ds^{n+1}}{dt} f(s^n(t), t) dt \rightarrow \int_0^t \varphi(s(t)) s'(t) f(s(t), t) dt. \end{aligned}$$

Переход к пределу в интегралах по $\tilde{Q}_T$ тождества (22) обоснован выше в п. 3.

Теорема 7. Пусть для a и φ выполнены условия теоремы 6. Если $u_0 \in W^{2-\frac{2}{q}}(0, 1)$, $3 < q \leq 4$, или $u_0 \in C^{1+\alpha}([0, 1])$, $\alpha = 1 - \frac{3}{q}$, выполнено условие согласования $u_0(1) = 0, u_{0x}(0) = 0$, то задача Стефана (1)–(5) при малых T имеет решение из класса

$$W_2^1(Q_T^s) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(0, s(t))) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, s(t))) \cap C^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^s) \times W_q^1(0, T).$$

Если дополнительно $\sup |a''(u)|$ ограничен при $0 \leq u \leq 2c_0c_1$, то решение в этом классе единственно. Как и в теореме 6, в тождестве (22) можно перейти к пределу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом выкладок разд. 4 доказательство совпадает с доказательством теоремы 6, если заменить b_1 на b_q , S на S_q и использовать не малость $\|u_{0x}\|_{L_2}$, а малость T .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно теореме 5 при условиях теоремы 7 имеем $G(s) \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}$. Поэтому в теореме 7 $s \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Применяя результат теоремы 12.2 из [15] к уравнению (24), из замечания 1 получим, что при условиях теоремы 7 решение $u(x, t)$ строго внутри Q_T^s имеет гладкость классического решения: $u \in C_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}, \frac{\alpha}{2}(Q_T^s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подгаев А. Г., Кулеш Т. Д. Исследование разрешимости задачи Стефана для случая сложной структуры вещества // Мат. заметки СВФУ. 2025. Т. 32, № 3. С. 61–81.
2. Meirmanov A. M. The Stefan problem. Berlin: Walter de Gruyter, 1992.
3. Данилюк И. И. О задаче Стефана // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 5. С. 133–185.
4. Бородин А. М. Задача Стефана // Укр. мат. вісн. 2011. Т. 8. С. 17–54.
5. Tarzia D. A. A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems. Rosario: Univ. Austral, Fac. Ciencias Empresar., Dep. Mat., 2000. (MAT, Ser. A, Conf. Semin. Trab. Mat.; V. 2).
6. Athanasopoulos I., Caffarelli L., Salsa S. Regularity of one-phase Stefan problem near Lipschitz initial data // Amer. J. Math. 2010. V. 132, N 6. P. 1693–1727.
7. Visintin A. Introduction to the models of phase transitions // Boll. Unione Mat. Ital. 1998. V. 1-B, N 8. P. 1–47.

8. Мейрманов А. М. Пример несуществования классического решения задачи Стефана // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 3. С. 547–549.
9. Bollati J., Tarzia A. D. One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change // Electron. J. Differ. Equ. 2018. V. 2018, N 10. P. 1–12.
10. Bollati J., Tarzia D. A. Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face using Kummer functions // arXiv:1610.09338 (2017).
11. Kyner W. T. An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem // J. Math. Mech. 1959. V. 8, N 4. P. 483–498.
12. Мейрманов А. М., Гальцева О. А., Сельдемиров В. Е. О существовании обобщенного решения в целом по времени одной задачи со свободной границей // Мат. заметки. 2020. Т. 107, № 2. С. 229–240.
13. Бельх В. Н. Корректность одной нестационарной осесимметричной задачи гидродинамики со свободной поверхностью // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 728–744.
14. Doronin G. G., Larkin N. A. KdV equation in domains with moving boundaries // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 328, N 1. P. 503–517. DOI 10.1016/j.jmaa.2006.05.057 2007.
15. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
16. Fasano A., Primicerio M. Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 1979. V. 72. P. 247–273.
17. Успенский А. Б. О методе выпрямления фронтов для многофронтных одномерных задач типа Стефана // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172, № 1. С. 61–64.
18. Камынин Л. И. Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 5. С. 1071–1105.
19. Бадерко Е. А. О разрешимости граничных задач для параболических уравнений высокого порядка в областях с криволинейными боковыми границами // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 10. С. 1781–1792.
20. Подгаев А. Г., Прудников В. Я., Кулеш Т. Д. Глобальная разрешимость трехмерной осесимметричной задачи Стефана для квазилинейного уравнения // Дальневост. мат. журн. 2022. № 1. С. 61–75.
21. Подгаев А. Г., Лисенков К. В. Разрешимость квазилинейного параболического уравнения в области с кусочно-монотонной границей // Дальневост. мат. журн. 2013. Т. 13, № 2. С. 250–272.
22. Подгаев А. Г. О теоремах компактности, связанных с задачами с неизвестной границей // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 4. С. 71–89.
23. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Подгаев Александр Григорьевич
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН,
68038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF STRONG
SOLUTIONS TO THE STEFAN PROBLEM
UNDER WEAK ASSUMPTIONS ON THE INPUT

A. G. Podgaev

Abstract: This work is a continuation of the research begun in [1]. The conditions for the smoothness of the input data are borderline between those for which the solution (statement) of the Stefan problem is weak (the statement does not include the equation for the phase-change boundary) and those for which it is strong, i.e. classical (the phases are separated by a smooth boundary). The strong global time solvability of the problem is established both in the case of an initial temperature close to the phase transition temperature and without this condition.

DOI: 10.5281/zenodo.2301816956

Keywords: the Stefan problem, iterative process, fixed point.

REFERENCES

1. Podgaev A. G. and Kulesh T. D., “Investigation of solvability of the Stefan problem for the case of complex structure of matter [in Russian],” *Mat. Zamet. SVFU*, **32**, No. 3, 61–81 (2025).
2. Meirmanov A. M., *The Stefan Problem*, Walter de Gruyter, Berlin (1992).
3. Danilyuk I. I., “On the Stefan problem,” *Russ. Math. Surv.*, **40**, No. 5, 157–223 (1985).
4. Borodin M. A., “Stefan problem,” *J. Math. Sci.*, **178**, No. 1, 13–40 (2011).
5. Tarzia D. A., *A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation, The Stefan and Related Problems*, Univ. Austral, Fac. Ciencias Empresar., Dep. Mat., Rosario (2000) (MAT, Ser. A, Conf. Semin. Trab. Mat.; vol. 2).
6. Athanasopoulos I., Caffarelli L., and Salsa S., “Regularity of one-phase Stefan problem near Lipschitz initial data,” *Amer. J. Math.* **132**, No. 6, 1693–1727 (2010).
7. Visintin A., “Introduction to models of phase transitions,” *Boll. Unione Mat. Ital.*, **1-B**, No. 8, 1–47 (1998).
8. Meyrmanov A. M., “An example of the non-existence of a classical solution to the Stefan problem [in Russian],” *Dokl. AN SSSR*, **258**, No. 3, 547–549 (1981).
9. Bollati J. and Tarzia A. D., “One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change,” *Electron. J. Differ. Equ.*, **2018**, No. 10, 1–12 (2018).
10. Bollati J. and Tarzia D. A., “Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face using Kummer functions,” *arXiv:1610.09338* (2017).
11. Kyner W. T., “An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem,” *J. Math. Mech.*, **8**, No. 4, 483–498 (1959).
12. Meyrmanov A. M. and Seldemirov V. E., “On the existence of a generalized time-based solution to a single problem with a free boundary [in Russian],” *Mat. Zametki*, **107**, No. 2, 229–240 (2020).
13. Belykh V. N., “Well-posedness of a nonstationary axisymmetric hydrodynamic problem with free surface,” *Sib. Math. J.*, **58**, No. 4, 564–577 (2017).

14. Doronin G. G. and Larkin N. A., "KdV equation in domains with moving boundaries," J. Math. Anal. Appl., **328**, No. 1, 503–517 (2007).
15. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N., Linear and Quasilinear Parabolic Type Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
16. Fasano A. and Primicerio M., "Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary conditions," J. Math. Anal. Appl., **72**, 247–273 (1979).
17. Uspensky A. B., "On the method of front straightening for multifront one-dimensional Stefan-type problems [in Russian]," Dokl. AN USSR, **172**, No. 1, 61–64 (1967).
18. Kamynin L. I. "Method of thermal potentials for a parabolic equation with discontinuous coefficients [in Russian]," Sib. Mat. Zh., **4**, No. 5, 1071–1105 (1963).
19. Baderko E. A., "On the solvability of boundary value problems for high-order parabolic equations in domains with curvilinear lateral boundaries [in Russian]," Difer. Equ., **12**, No. 10, 1781–1792 (1976).
20. Podgaev A. G., Prudnikov V. Ya., and Kulesh T. D., "Global solvability of the three-dimensional axisymmetric Stefan problem for a quasi-linear equation [in Russian]," Dalnevost. Math. J., **12**, No. 1, 61–75 (2022).
21. Podgaev A. G. and Lisenkov K. V., "Solvability of a quasi-linear parabolic equation in a domain with a piecewise monotonic boundary [in Russian]," Dalnevost. Math. J., **13**, No. 2, 250–272 (2013).
22. Podgaev A. G. "On compactness theorems related to problems with unknown boundaries [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **28**, No. 4, 71–89 (2021).
23. Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N., Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Nauka, Moscow (1973).

Aleksandr G. Podgaev
Khabarovsk branch of the Institute of Applied Mathematics,
Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
60 Seryshev Street, Khabarovsk 680038, Russia