

УДК 517.9

ОДИН КЛАСС ЗАДАЧ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
ПОРЯДКА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ
РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

М. В. Плеханова, А. В. Псху, В. Е. Федоров

Аннотация. Получено функциональное тождество, связывающее решение задачи Коши для линейного уравнения в банаховом пространстве, разрешенного относительно дробной производной Римана — Лиувилля, с элементами ядра оператора, сопряженного к оператору из уравнения. С помощью этого тождества получены теоремы о разрешимости обратной задачи восстановления порядка дробной производной в уравнении. Абстрактные результаты использованы при рассмотрении задач для уравнений в частных производных.

DOI: 10.5281/zenodo.23018168752

Ключевые слова: дробная производная Римана — Лиувилля, задача типа Коши, обратная задача восстановления порядка дробной производной, начально-краевая задача.

*Посвящается Ивану Егоровичу Егорову
по случаю его 75-летия*

В последние годы большой интерес у исследователей вызывают задачи определения порядка дробной производной в дифференциальном уравнении [1–7]. Обусловлен он возросшей ролью уравнений с дробными производными в задачах математического моделирования реальных процессов. Часто из общих соображений понятно, что рассматриваемая математическая модель должна содержать дробную производную, имеющую порядок из промежутка, скажем, $(1, 2)$. Но каково точное значение ее порядка? Это можно приближенно определить экспериментальным путем, но сделать это в большинстве случаев очень непросто. Другой подход — определение порядка дробной производной с помощью обратной задачи, когда дифференциальное уравнение рассматривается как уравнение с неизвестным параметром (порядок дробной производной) и снабжается дополнительным условием переопределения, позволяющим вместе с решением найти значение неизвестного параметра.

В большинстве случаев авторы рассматривают задачи восстановления порядка дробной производной для конкретных уравнений в частных производных.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 26-21-20015, <https://rscf.ru/project/26-21-20015/>.

© 2026 Плеханова М. В., Псху А. В., Федоров В. Е.

В данной работе рассмотрен класс уравнений в банаховых пространствах

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

с производной Римана — Лиувилля D^α , где $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{C}_{\alpha, R}$, что равносильно существованию сильно непрерывного разрешающего семейства операторов соответствующего однородного уравнения [8], $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{Z}$, $T > 0$.

Теоремы о восстановлении порядка производной основаны на функциональном тождестве, связывающем решения задачи типа Коши для уравнения (1) с элементами ядра сопряженного оператора A^* . В работе [8] такой подход был использован в случае, когда A — оператор Лапласа.

В § 1 приведены предварительные сведения о разрешимости задачи типа Коши для уравнения (1). В § 2 содержатся основные результаты работы. Сначала доказано упомянутое выше функциональное тождество в случаях $\alpha \in (1, 2]$ и $\alpha \in (0, 1]$. Затем оно использовано при доказательстве теорем об однозначной разрешимости обратной задачи восстановления порядка дробной производной в уравнении (1). В § 3 абстрактные результаты использованы для обратной задачи в пространстве последовательностей, а этот результат, в свою очередь, позволил исследовать обратные задачи для класса уравнений в частных производных, включающего в себя уравнение субдиффузии.

§ 1. Предварительные сведения

Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, определяется равенством $D^\alpha z(t) := D^m J^{m-\alpha} z(t)$, где D^m — производная целого порядка m и

$$J^\beta z(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} z(s) ds$$

есть дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$. Будем также использовать обозначения $J^0 z(t) := z(t)$, $D^{-\beta} z(t) := J^\beta z(t)$, $\beta > 0$.

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов из пространства $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{Z}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{Z}$ и действующих в него же.

Снабдим область определения D_A оператора $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ нормой его графика и получим банахово пространство D_A . Обозначим $(\mu I - A)^{-1} := R_\mu(A)$, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A .

Пусть $\alpha > 0$, $\omega \geq 0$. Через $\mathcal{C}_{\alpha, R}(\omega)$ обозначим класс операторов $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие два условия:

- (i) если $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, то $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;
- (ii) существует такое $K > 0$, что при всех $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ и $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

выполняется неравенство

$$\|D^n(\lambda^{m-1} R_{\lambda^\alpha}(A))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K\Gamma(\alpha - m + n + 1)}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{\alpha - m + n + 1}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [8] показано, что условие $A \in \mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$ необходимо и достаточно для существования сильно непрерывного разрешающего семейства операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ однородного уравнения (1) ($f \equiv 0$). При этом

$$S(t) := s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!} D^k H(n+\omega),$$

где $H(\lambda) = \lambda^{m-1} R_{\lambda^\alpha}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обозначим

$$\mathcal{C}_{\alpha,R} := \bigcup_{\omega \geq 0} \mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega).$$

В [10] показано, что $\mathcal{C}_{\alpha,R} \supset \mathcal{C}_{\beta,R}$ при $0 < \alpha < \beta$, а в [8] — что $\mathcal{C}_{\alpha,R} = \mathcal{L}(\mathcal{X})$ при $\alpha > 2$.

Функция $z \in C((0, T]; D_A)$, для которой

$$J^{m-\alpha} z \in C^m((0, T]; \mathcal{X}) \cap AC^m([0, T]; \mathcal{X}),$$

называется *решением задачи типа Коши*

$$D^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

для уравнения (1), если для всех $t \in (0, T]$ выполняются равенство (1) и условия (2).

Теорема 1 [8]. Пусть $\alpha \in (1, 2]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,R}$, $f \in L_1(0, T; D_A) \cup W_1^1(0, T; \mathcal{X})$. Тогда для любых $z_0, z_1 \in D_A$ функция

$$z(t) = S(t)z_0 + J^1 S(t)z_1 + \int_0^t J^1 S(t-s)f(s) ds$$

является единственным решением задачи типа Коши

$$D^{\alpha-2} z(0) = z_0, \quad D^{\alpha-1} z(0) = z_1 \quad (3)$$

для уравнения (1).

Обозначим через $L_{1,\alpha-1}(0, T; \mathcal{X})$ множество измеримых функций $f : (0, T) \rightarrow \mathcal{X}$, для которых сходится интеграл

$$\int_0^T t^{\alpha-1} |f(t)| dt.$$

Теорема 2 [8]. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,R}$,

$$f \in L_{1,\alpha-1}(0, T; D_A) \cup [L_{1,\alpha-1}(0, T; \mathcal{X}) \cap W_1^1(0, T; \mathcal{X})]. \quad (4)$$

Тогда для любого $z_0 \in D_A$ функция

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s) ds$$

является единственным решением задачи типа Коши

$$D^{\alpha-1} z(0) = z_0 \quad (5)$$

для уравнения (1).

§ 2. Задача по восстановлению порядка дробной производной

Пусть A^* — сопряженный оператор к оператору $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $\ker A^* \neq \{0\}$, $h \in \ker A^* \setminus \{0\}$, скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают отношение двойственности между банаховым пространством $\mathcal{Z}$ и сопряженным к нему пространством $\mathcal{Z}^*$.

Теорема 3. Пусть $\alpha \in (1, 2]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha, R}$, $f \in L_1(0, T; D_A) \cup W_1^1(0, T; \mathcal{Z})$, $\ker A^* \neq \{0\}$, $h \in \ker A^* \setminus \{0\}$, $z_0, z_1 \in D_A$. Если $z(t)$ — решение задачи (1), (3), то

$$\langle h, z(t) \rangle = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \langle h, z_1 \rangle + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \langle h, z_0 \rangle + J^\alpha \langle h, f(t) \rangle. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подействуем функционалом h на обе части равенства (1), тогда

$$\langle h, D^\alpha z(t) \rangle = D^\alpha \langle h, z(t) \rangle = \langle h, Az(t) + f(t) \rangle = \langle A^* h, z(t) \rangle + \langle h, f(t) \rangle = \langle h, f(t) \rangle.$$

Следовательно, функция $\langle h, z(t) \rangle$ является решением задачи

$$D^\alpha \langle h, z(t) \rangle = \langle h, f(t) \rangle, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} D^{\alpha-2+k} \langle h, z(t) \rangle = \langle h, z_k \rangle, \quad k = 0, 1.$$

В силу формулы (3.3.33) из [11] получим решение (6) этой задачи. $\square$

Аналогично доказывается теорема для случая $\alpha \in (0, 1]$.

Теорема 4. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha, R}$, f удовлетворяет условию (4), $\ker A^* \neq \{0\}$, $h \in \ker A^* \setminus \{0\}$, $z_0 \in D_A$. Если $z(t)$ — решение задачи (1), (5), то

$$\langle h, z(t) \rangle = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \langle h, z_0 \rangle + J^\alpha \langle h, f(t) \rangle. \quad (7)$$

Рассмотрим задачу восстановления порядка дробной производной

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (8)$$

$$D^{\alpha-2} z(0) = z_0, \quad D^{\alpha-1} z(0) = z_1, \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln |\langle h, z(t) \rangle|}{\ln t} = d, \quad (10)$$

где $h \in \mathcal{Z}^*$, $d \in \mathbb{C}$ заданы, $\alpha \in (1, 2]$ неизвестно. Решением задачи (8)–(10) будем называть пару (α, z) , где z — решение задачи (8), (9) с данным $\alpha \in (1, 2]$ и выполняется условие (10).

Теорема 5. Пусть $\beta \in (1, 2]$, $A \in \mathcal{C}_{\beta, R}$, $f \in L_1(0, T; D_A) \cup W_1^1(0, T; \mathcal{Z})$, $\ker A^* \neq \{0\}$, $h \in \ker A^* \setminus \{0\}$, $d \in (-1, \beta - 2]$, $z_0, z_1 \in D_A$, $\langle h, z_0 \rangle \neq 0$. Тогда существует единственное решение (α, z) задачи (8)–(10), где $\alpha = 2 + d \in (1, \beta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(t) := \langle h, z(t) \rangle$,

$$c_1 := \frac{\langle h, z_1 \rangle}{\Gamma(\alpha)}, \quad c_0 := \frac{\langle h, z_0 \rangle}{\Gamma(\alpha-1)}.$$

Из (6) получаем $g(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_0 t^{\alpha-2} + J^\alpha \langle h, f(t) \rangle = t^{\alpha-2}(c_0 + o(1))$ при $t \rightarrow 0+$. Поскольку $\langle h, z_0 \rangle \neq 0$, то $c_0 \neq 0$, стало быть,

$$\ln |g(t)| = (\alpha - 2) \ln t + \ln |c_0 + o(1)|, \quad t \rightarrow 0+,$$

$$\alpha = 2 + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln |g(t)|}{\ln t}.$$

Отсюда следует существование и единственность $\alpha \in (1, \beta]$. Из теоремы 1 вытекает существование и единственность соответствующего z . $\square$

Теорема 6. Пусть $\beta \in (1, 2]$, $A \in \mathcal{C}_{\beta, R}$, $f \in L_1(0, T; D_A) \cup W_1^1(0, T; \mathcal{X})$, $\ker A^* \neq \{0\}$, $h \in \ker A^* \setminus \{0\}$, $d \in (0, \beta - 1]$, $z_0, z_1 \in D_A$, $\langle h, z_0 \rangle = 0$, $\langle h, z_1 \rangle \neq 0$. Тогда существует единственное решение (α, z) задачи (8)–(10), где $\alpha = 1 + d \in (1, \beta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что

$$g(t) = c_1 t^{\alpha-1} + J^\alpha \langle h, f(t) \rangle = t^{\alpha-1}(c_1 + o(1)), \quad t \rightarrow 0+,$$

$$\alpha = 1 + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln |g(t)|}{\ln t}. \quad \square$$

Аналогично с использованием теоремы 2 доказывается теорема для случая $\alpha \in (0, 1]$.

Теорема 7. Пусть $\beta \in (0, 1]$, $A \in \mathcal{C}_{\beta, R}$, f удовлетворяет условию (4), $\ker A^* \neq \{0\}$, $h \in \ker A^* \setminus \{0\}$, $d \in (-1, \beta - 1]$, $z_0 \in D_A$, $\langle h, z_0 \rangle \neq 0$. Тогда существует единственное решение (α, z) задачи (5), (8), (10), где $\alpha = 1 + d \in (0, \beta]$.

§ 3. Определение порядка дробной производной в начально-краевой задаче

В банаховом пространстве l_2 последовательностей $z = \{z_n\}_{n=1}^\infty$, $z_n \in \mathbb{C}$ при $n \in \mathbb{N}$, для которых сходится ряд $\|z\|_{l_2} = \sum_{n=1}^\infty |z_n|^2$, рассмотрим задачу

$$D^\alpha z_n(t) = (\mu_{n_0} - \mu_n) e^{i\pi\gamma/2} z_n(t), \quad t \in (0, T], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

$$D^{\alpha-2} z_n(0) = z_{0n}, \quad D^{\alpha-1} z_n(0) = z_{1n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln |z_{n_0}(t)|}{\ln t} = d, \quad (13)$$

где $n_0 \in \mathbb{N}$, $|\gamma| < \varepsilon \in (0, 1)$, $\mu_n \geq 0$, $z_{0n}, z_{1n} \in \mathbb{C}$ при $n \in \mathbb{N}$, и $d \in \mathbb{R}$ заданы, требуется определить $\alpha \in (1, 2 - \varepsilon]$ и $z_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\mathcal{Z} = l_2$, $B_\gamma z = \{-\mu_n e^{i\pi\gamma/2} z_n\}_{n=1}^\infty$ для $z = \{z_n\}_{n=1}^\infty \in l_2$ таких, что $\{\mu_n e^{i\pi\alpha/2} z_n\}_{n=1}^\infty \in l_2$, т. е. составляющих область определения $D_{B_\gamma} \subset l_2$. Нетрудно показать, что $B_\gamma \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ и $\sigma(B_\gamma) = \{-\mu_n e^{i\pi\gamma/2} : n \in \mathbb{N}\}$. Задача (11)–(13) является частным случаем задачи (8)–(10) в пространстве l_2 с оператором $A_\gamma := B_\gamma + \mu_{n_0} e^{i\pi\gamma/2} I$, $f \equiv 0$, $h_{n_0} := \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots\} \in l_2$, где 1 находится на n_0 -м месте. Действительно, в таком случае, как доказано в [12], $A_\gamma \in \mathcal{C}_{2-\varepsilon, R}$, $A_\gamma^* = A_{-\gamma}$,

$\ker A_\gamma^* \supset \text{span}\{h_{n_0}\}$. В силу теорем 5 и 6 если $z_{0n_0} \neq 0$ и $d \in (-1, -\varepsilon]$ или $z_{0n_0} = 0$, $z_{1n_0} \neq 0$ и $d \in (0, 1 - \varepsilon]$, то существует единственное решение задачи (11)–(13). При этом $\alpha = 2 + d$ или $\alpha = 1 + d$ соответственно.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей. Рассмотрим задачу

$$D_t^\alpha v(\xi, t) = e^{i\pi\gamma/2}(\Delta - \lambda)v(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (15)$$

$$D^{\alpha-2}v(\xi, 0) = v_0(\xi), \quad D^{\alpha-1}v(\xi, 0) = v_1(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (16)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln |\langle v(\cdot, t), \varphi \rangle|}{\ln t} = d, \quad (17)$$

где $|\gamma| < \varepsilon \in (0, 1)$, Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu = \nu(\xi)$ — внешняя единичная нормаль к границе области $\partial\Omega$, $v_0, v_1, \varphi \in L_2(\Omega)$ и $d \in \mathbb{R}$ заданы, $\alpha \in (1, 2 - \varepsilon]$ и v неизвестны. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения оператора Лапласа с краевым условием (15), занумерованные по невозрастанию с учетом их кратностей, $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система соответствующих собственных функций.

Положим $z_n(t) = \langle v(\cdot, t), \varphi_n \rangle$, $z_{0n} = \langle v_0, \varphi_n \rangle$, $z_{1n} = \langle v_1, \varphi_n \rangle$ при $n \in \mathbb{N}$. Если $\lambda = \lambda_{n_0}$, $\varphi = \varphi_{n_0}$, то задача (14)–(17) принимает вид (11)–(13) при $\mu_{n_0} = -\lambda = -\lambda_{n_0}$, $\mu_n = |\lambda_n|$, $n \in \mathbb{N}$. В силу теорем 5 и 6 если $\langle v_0, \varphi_n \rangle \neq 0$ и $d \in (-1, 0]$ или $\langle v_0, \varphi_n \rangle = 0$, $\langle v_1, \varphi_n \rangle \neq 0$ и $d \in (0, 1]$, то существует единственное решение задачи (14)–(17). При этом $\alpha = 2 + d$ или $\alpha = 1 + d$ соответственно.

Если $\lambda = 0$ в уравнении (14), то можно взять $\varphi(\xi) \equiv 1$ в условии (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., Yamazaki T. Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation // Inverse Probl. 2009. V. 25, N 11. Art. ID 115002.
2. Hatano Y., Nakagawa J., Wang S., Yamamoto M. Determination of order in fractional diffusion equation // Int. J. Math. Industry. 2013. V. 5A. P. 51–57.
3. Li Z., Liu Y., Yamamoto M. Inverse problems of determining parameters of the fractional partial differential equations // Handb. Fractional Calculus with Applications. V. 2: Fractional Differential Equations (A. Kochubei, Y. Luchko, eds.). Berlin: De Gruyter, 2019. P. 431–442.
4. Alimov Sh., Ashurov R. Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2020. V. 28. P. 651–658.
5. Ashurov R., Umarov S. Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations // Fract. Calculus Appl. Anal. 2020. V. 23, N 6. P. 1647–1662.
6. Ashurov R., Sitnik S. Identification of the order of the fractional derivative for the fractional wave equation // Fractal Fract. 2023. V. 7, N 1. P. 67.
7. Alimov Sh., Ashurov R. On determining the fractional exponent of the subdiffusion equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2025. V. 33, N 2. P. 171–181.
8. Fedorov V. E., Vershinina D. A. Strongly continuous resolving families of equations with Riemann–Liouville derivative // J. Math. Sci. 2025. V. 287. P. 52–68.
9. Pskhu A. V. On overdetermination conditions in order determination inverse problems for fractional diffusion equations // Uzb. Math. J. 2025. V. 69, N 2. P. 94–103.
10. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Vershinina D. A. Subordination principle for equations with the Riemann–Liouville derivative // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 11. P. 5577–5587.

11. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Sci. Publ., 2006.
12. Fedorov V. E., Du W.-Sh., Kostić M., Plekhanova M. V., Melekhina D. V. Hille–Yosida type theorem for fractional differential equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivative // Fractal Fract. 2025. V. 9, N 8. P. 499.

Плеханова Марина Васильевна
Челябинский государственный университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001

Псху Арсен Владимирович
Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН
ул. Шортанова, 89А, Нальчик 360017

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001

A CLASS OF PROBLEMS FOR RESTORING THE ORDER OF THE RIEMANN—LIOUVILLE DERIVATIVE

M. V. Plekhanova,
A. V. Pskhu, and V. E. Fedorov

Abstract: A functional identity is obtained that connects a solution of the Cauchy type problem for a linear equation in a Banach space solved with respect to the Riemann—Liouville fractional derivative with elements of the kernel of the operator, which is conjugate to the operator from an equation. This identity is used to obtain theorems on the unique solvability of an inverse problem of restoring the order of a fractional derivative in an equation. Abstract results are applied to considering some problems for partial differential equations.

DOI: 10.5281/zenodo.2301816685

Keywords: Riemann—Liouville fractional derivative, Cauchy type problem, inverse problem of restoring the order of the fractional derivative, initial boundary value problem.

REFERENCES

1. Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., and Yamazaki T., “Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation,” *Inverse Probl.*, **25**, No. 11, 115002 (2009).
2. Hatano Y., Nakagawa J., Wang S., and Yamamoto M., “Determination of order in fractional diffusion equation,” *Int. J. Math. Industry*, **5A**, 51–57 (2013).
3. Li Z., Liu Y., and Yamamoto M., “Inverse problems of determining parameters of the fractional partial differential equations,” in: *Handb. Fractional Calculus with Applications*, vol. 2: *Fractional Differential Equations* (A. Kochubei, Y. Luchko, eds.), pp. 431–442, De Gruyter, Berlin (2019).
4. Alimov Sh. and Ashurov R., “Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **28**, 651–658 (2020).
5. Ashurov R. and Umarov S., “Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations,” *Fract. Calculus Appl. Anal.*, **23**, No. 6, 1647–1662 (2020).
6. Ashurov R. and Sitnik S., “Identification of the order of the fractional derivative for the fractional wave equation,” *Fractal Fract.*, **7**, No. 1, 67 (2023).
7. Alimov Sh. and Ashurov R., “On determining the fractional exponent of the subdiffusion equation,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **33**, No. 2, 171–181 (2025).
8. Fedorov V. E. and Vershinina D. A., “Strongly continuous resolving families of equations with Riemann—Liouville derivative,” *J. Math. Sci.*, **287**, 52–68 (2025).
9. Pskhu A. V., “On overdetermination conditions in order determination inverse problems for fractional diffusion equations,” *Uzb. Math. J.*, **69**, No. 2, 94–103 (2025).
10. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Vershinina D. A., “Subordination principle for equations with the Riemann—Liouville derivative,” *Lobachevskii J. Math.*, **46**, No. 11, 5577–5587 (2025).
11. Kilbas A. A., Srivastava H. M., and Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam; Boston; Heidelberg (2006).

- 12.** *Fedorov V. E., Du W.-Sh., Kostić M., Plekhanova M. V., and Melekina D. V.*, “Hille–Yosida type theorem for fractional differential equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivative,” *Fractal Fract.*, **9**, No. 8, 499 (2025).

Marina V. Plekhanova
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia

Arsen V. Pskhu
Institute of Applied Mathematics and Automation
of the Kabardino-Balkarian Scientific Center,
89A Shortanov Street, Nalchik 360017, Russia

Vladimir E. Fedorov,
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk 454001, Russia