

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ И РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Н. Р. Пинигина

Аннотация. Изучается разрешимость краевых задач для параболических уравнений с произвольно меняющимся направлением эволюции. Особенностью изучаемых уравнений является то, что один из коэффициентов уравнения не только меняет знак, но и является разрывным (имеет разрыв первого рода). В зависимости от коэффициентов уравнения в работе предлагаются постановки краевых задач и доказывается их корректность, т. е. доказывается, что предлагаемые краевые задачи имеют единственные решения, обладающие всеми обобщенными по С. Л. Соболеву производными, входящими в уравнение.

DOI: 10.5281/zenodo.2301816685

Ключевые слова: параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции, разрывный коэффициент, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

*Посвящается Ивану Егоровичу Егорову
по случаю его 75-летия*

Введение

В теории краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции можно выделить два направления.

Первое из них связано с теорией параболических уравнений с разрывным знакопеременным коэффициентом. Простейшей моделью таких уравнений можно назвать уравнение

$$\operatorname{sign} x \cdot u_t - u_{xx} = f(x, t),$$

рассматриваемое в области, в которой переменная x имеет разный знак. Подобные уравнения и их различные обобщения изучались в работах Жевре, С. А. Терсенова, С. Г. Пяткова, С. В. Попова, А. И. Кожанова и их учеников (см. [1–6]).

Второе направление связано с уравнениями, коэффициенты которых непрерывны и могут менять знак при различных значениях временной переменной. Постановку корректной краевой задачи для подобных уравнений с произвольно меняющимся направлением эволюции предложил в рамках общей теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений итальянский математик

Фикера [7]; дальнейшие результаты в этом направлении можно найти в работах [8–12].

В настоящей работе будут изучаться задачи, в которых объединяются два вышеуказанных направления, т. е. в которых соответствующие уравнения имеют как разрывный знакопеременный коэффициент типа $\text{sign } x$, так и коэффициент, меняющий знак в зависимости от временной переменной.

Все построения и рассуждения в работе будут основаны на свойствах функций из пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l . Необходимые определения и описание свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [13–15].

1. Постановка задач

Пусть Q — область $(-1; 1) \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, плоскости переменных x и t , Q_1 и Q_2 — прямоугольники $(-1; 0) \times (0, T)$ и $(0; 1) \times (0, T)$, $\varphi(t)$, $h(x)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in [-1, 1]$, $t \in [0, T]$, причем функция $h(x)$ непрерывна на полуинтервале $[-1, 0)$ и имеет конечный предел $h(-0)$, а также на отрезке $[0, 1]$. Далее пусть L — дифференциальный оператор, действие которого на функциях $u(x, t)$, определенных в прямоугольниках Q_1 и Q_2 , задается равенством

$$Lv = \varphi(t)v_t - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)v_x) + c(x, t)v.$$

Всюду далее будем считать, что выполняется условие

$$x \cdot h(x) > 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \quad h(-0) < 0, \quad h(+0) > 0. \quad (\text{H})$$

Это условие вместе с отсутствием условия знакоопределенности функции $\varphi(t)$ и будет означать, что в рассматриваемых ниже уравнениях направление эволюции может меняться как в зависимости от переменной x , так и в зависимости от временной переменной.

В параболических уравнениях с оператором L в случае непрерывной знакоопределенной функции $h(x)$ на постановку корректных задач существенное влияние оказывают числа $\varphi(0)$ и $\varphi(T)$. Очевидно, что в случае знакопеременной разрывной функции $h(x)$ это влияние сохранится (и даже усилится).

Краевая задача 1. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3)$$

$$u(x, T) = 0, \quad x \in (-1, 0), \quad (4)$$

$$u(-0, t) = \alpha u(+0, t), \quad u_x(+0, t) = \beta u_x(-0, t), \quad t \in (0, T) \quad (5)$$

(здесь и далее α и β — заданные действительные числа).

Краевая задача 2. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3) и (5).

Краевая задача 3. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4) и (5).

Краевая задача 4. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (5), а также условия

$$u(x, T) = 0 \quad x \in (0, 1), \quad (6)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad x \in (-1, 0). \quad (7)$$

Краевая задача 5. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (5) и (6).

Краевая задача 6. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (5) и (7).

Краевая задача 7. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (5) и (6).

Краевая задача 8. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4), (5) и (7).

Краевая задача 9. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (5).

Целью настоящей работы будет доказательство существования регулярных решений $u(x, t)$ — решений, принадлежащих пространствам $W_2^{2,1}(Q_1)$ и $W_2^{2,1}(Q_2)$.

Основой для доказательства будет метод регуляризации.

В дальнейшем регулярными решениями той или иной задачи будем называть функции, имеющие суммируемые с квадратом по областям Q_1 и Q_2 все обобщенные производные, входящие в соответствующее уравнение.

Пусть ε — положительное число, $\varkappa_1 = h(-0)$, $\varkappa_2 = h(+0)$, L_ε — дифференциальный оператор, действие которого на функциях $v(x, t)$, определенных на прямоугольниках Q_1 и Q_2 задается равенством

$$L_\varepsilon v = \begin{cases} \varepsilon \varkappa_1 u_{xxtt} + Lv, & (x, t) \in Q_1, \\ \varepsilon \varkappa_2 u_{xxtt} + Lv, & (x, t) \in Q_2. \end{cases}$$

Каждой из задач 1–9 будет соответствовать регуляризованная с помощью оператора L_ε задача.

Краевая задача 1_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения

$$L_\varepsilon u = f(x, t) \quad (1_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(5), а также условия

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (-1, 0), \quad (8)$$

$$u_t(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (9)$$

Краевая задача 2_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1_ε) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (5), (8), (9), а также условие

$$u_t(x, T) = 0, \quad x \in (-1, 0). \quad (10)$$

Краевая задача 3_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1_ε) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4) и (5), (8), (9), а также условие

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (11)$$

Краевая задача 4_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1_ε) и такую, что для нее выполняются условия (2), (5), (6), (7), (10), (11).

Краевая задача 5_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (5), (6), (8), (10), (11).

Краевая задача 6_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (5), (7), (9), (10), (11).

Краевая задача 7_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (5), (6), (8), (10).

Краевая задача 8_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4), (5), (7), (9), (11).

Краевая задача 9_ε. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (5), (8), (9), (10), (11).

2. Априорные оценки

Доказательство разрешимости краевых задач 1–9 будет проведено по следующей схеме: вначале будет установлена разрешимость в классе регулярных решений краевых задач 1_ε – 9_ε , затем будет организована процедура предельного перехода. В свою очередь, разрешимость краевых задач 1_ε – 9_ε при фиксированном ε будет установлена с помощью метода продолжения по параметру.

Проведем вначале вспомогательные построения.

Пусть λ — число из отрезка $[0, 1]$. В каждой из задач 1_ε – 9_ε условия (5) заменим условиями

$$u(-0, t) = \lambda\alpha u(+0, t), \quad u_x(+0, t) = \lambda\beta u_x(-0, t), \quad t \in (0, T). \quad (5_\lambda)$$

По функции $u(x, t)$ определим функции $w(x, t)$ и $z(x, t)$:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= u(x, t) - \lambda\alpha(1+x)u(+0, t), \quad (x, t) \in Q_1, \\ z(x, t) &= u(x, t) + \lambda\beta(1-x)u_x(-0, t), \quad (x, t) \in Q_2. \end{aligned}$$

Пусть выполняется условие

$$\alpha\beta > 0. \quad (12)$$

Для функций $w(x, t)$ и $z(x, t)$ должны выполняться уравнения

$$\begin{aligned} L_\varepsilon w &= \varphi(t)w_t + \varepsilon\kappa_1 w_{xxtt} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)w_x) + c(x, t)w \\ &= \frac{\lambda\alpha(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}(\varphi(t)(z_t(+0, t) - \lambda\beta w_{xt}(-0, t))) \\ &\quad + c(x, t)(z(+0, t) - \lambda\beta w_x(-0, t)) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} L_\varepsilon z &= \varphi(t)z_t + \varepsilon\kappa_2 z_{xxtt} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)z_x) + c(x, t)z \\ &= -\frac{\lambda\beta(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}(\varphi(t)(w_{xt}(-0, t) + \lambda\alpha z(+0, t))) \\ &\quad + c(x, t)(w_{xt}(-0, t) + \lambda\alpha z(+0, t)) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_2, \end{aligned} \quad (14)$$

граничные условия

$$w(-1, t) = w(-0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (15)$$

$$z_x(+0, t) = z(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (16)$$

а также соответствующие условия по переменной t — условия (3), (4), (8) и (9) для краевой задачи 1_ε , условия (3), (8), (9) и (10) для краевой задачи 2_ε , условия (4), (8), (9) и (11) для краевой задачи 3_ε , условия (6), (7), (10) и (11) для краевой задачи 4_ε , условия (6), (8), (10) и (11) для краевой задачи 5_ε , условия (7), (9), (10) и (11) для краевой задачи 6_ε , условия (3), (6), (8) и (10) для краевой задачи 7_ε , условия (4), (7), (9) и (11) для краевой задачи 8_ε , условия (8), (9), (10) и (11) для краевой задачи 9_ε .

Выполненные построения означают, что функции $w(x, t)$ и $z(x, t)$ связаны системой (13), (14) и что для них должны выполняться однородные краевые условия (15) и (16), а также соответствующие условия по переменной t . Очевидно, что при $\lambda = 0$ равенства (13), (14) вместе с краевыми условиями дают распадающуюся задачу. Если установить существование регулярного решения этой задачи и если для всевозможных решений краевой задачи для системы (13), (14) будут иметь место нужные априорные оценки, то с помощью теоремы о методе продолжения по параметру I [16, гл. III, 14] нетрудно будет установить разрешимость каждой из задач 1_ε - 9_ε при всех λ из отрезка $[0, 1]$, т. е. и при $\lambda = 1$.

Итак, прежде всего необходимо показать наличие нужных априорных оценок для функций $w(x, t)$ и $z(x, t)$ (оценок, равномерных по λ).

Определим функцию $u(x, t)$:

$$u(x, t) = w(x, t) + \frac{\lambda\alpha(1+x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}(z(+0, t) - \lambda\beta w_x(-0, t)), \quad (x, t) \in Q_1, \quad (17)$$

$$u(x, t) = z(x, t) - \frac{\lambda\beta(1-x)}{1+\lambda^2\alpha\beta}(w_x(-0, t) + \lambda\alpha z(+0, t)), \quad (x, t) \in Q_2. \quad (18)$$

Очевидно, что для функции $u(x, t)$ выполняются условия (5 $_\lambda$), а также уравнения

$$\varphi(t)u_t + \varepsilon\kappa_1 u_{xtt} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x) + c(x, t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_1, \quad (19)$$

$$\varphi(t)u_t + \varepsilon\kappa_2 u_{xtt} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)u_x) + c(x, t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_2. \quad (20)$$

Алгоритм получения априорных оценок для всех задач 1_ε - 9_ε будет показан на примере краевой задачи 1_ε .

Положим

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [-1, 0), \\ h(-0), & x = 0, \end{cases} \quad \bar{h}_1 = \min_{[-1, 0]} |h_1(x)|, \quad \bar{h}_2 = \min_{[0, 1]} h(x).$$

Лемма 1. Пусть выполняются условие (H), условие (12), а также условия

$$\varphi(t) \in C^1([0, T]), \quad \varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) > 0; \quad (21)$$

$$h_1(x) \in C^1([-1, 0]), \quad h(x) \in C^1([0, 1]), \quad \bar{h}_1 > 0, \quad \bar{h}_2 > 0; \quad (22)$$

$$c(x, t) \in C(\bar{Q}); \quad (23)$$

$$\bar{h}_1 - c(x, t) + \frac{1}{2}\varphi'(t) > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{Q}_1, \quad (24)$$

$$\bar{h}_2 + c(x, t) - \frac{1}{2}\varphi'(t) > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{Q}_2.$$

Тогда для регулярных решений $u(x, t)$ краевой задачи (19), (20), (2)-(4), (5 $_\lambda$), (8), (9) выполняется оценка

$$\varepsilon \int_{Q_1} u_{xt}^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_2} u_{xt}^2 dxdt + \int_{Q_1} (u^2 + u_x^2) dxdt + \int_{Q_2} (u^2 + u_x^2) dxdt \leq M_1 \int_Q f^2 dxdt \quad (25)$$

с постоянной M_1 , определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$, $h(x)$ и $c(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\gamma = -\frac{\alpha h(-0)}{\beta h(+0)}$. Умножим уравнение (19) на функцию $-\gamma u(x, t)$ и проинтегрируем по области Q_1 . Далее умножим уравнение (20) на функцию $u(x, t)$ и проинтегрируем по области Q_2 . Складывая два полученных выражения и выполняя интегрирование по частям, придем к равенству

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \kappa_1 \int_{Q_1} u_{xt}^2 dxdt + \varepsilon \kappa_2 \int_{Q_2} u_{xt}^2 dxdt + \gamma \int_{Q_1} \left[-c(x, t) + \frac{1}{2} \varphi'(t) \right] u^2 dxdt \\ & - \int_{Q_1} h(x) u_x^2 dxdt + \int_{Q_2} \left[c(x, t) - \frac{1}{2} \varphi'(t) \right] u^2 dxdt + \int_{Q_2} h(x) u_x^2 dxdt \\ & + \frac{\gamma \varphi(0)}{2} \int_{-1}^0 u^2(x, 0) dx + \frac{\varphi(T)}{2} \int_0^1 u^2(x, T) dx = -\gamma \int_{Q_1} f u dxdt + \int_{Q_2} f u dxdt. \end{aligned} \quad (26)$$

Для функций $\psi_1(x)$ из пространства $W_2^1([-1, 0])$ и $\psi_2(x)$ из пространства $W_2^1([0, 1])$ таких, что $\psi_1(-1) = 0$, $\psi_2(1) = 0$, имеют место неравенства

$$\int_{-1}^0 \psi_1^2(x) dx \leq \int_{-1}^0 \psi_1'^2(x) dx, \quad \int_0^1 \psi_2^2(x) dx \leq \int_0^1 \psi_2'^2(x) dx.$$

Эти неравенства вместе с положительностью чисел $\varphi(0)$, $\varphi(T)$, $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ дают после применения в правой части (25) неравенства Юнга оценку

$$\varepsilon \int_{Q_1} u_{xt}^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_2} u_{xt}^2 dxdt + \int_{Q_1} u^2 dxdt + \int_{Q_2} u^2 dxdt \leq M \int_Q f^2 dxdt.$$

Требуемая оценка (25) теперь очевидна.

Лемма 2. Пусть выполняются все условия леммы 1, а также условия

$$\begin{aligned} c_t(x, t) & \in C(\bar{Q}), \\ \bar{h}_1 - c(x, t) - \frac{1}{2} \varphi'(t) & > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{Q}_1, \\ \bar{h}_2 + c(x, t) + \frac{1}{2} \varphi'(t) & > 0 \quad \text{при } (x, t) \in \bar{Q}_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f(x, 0) = 0$ при $x \in [0, 1]$, $f(x, T) = 0$ при $x \in [-1, 0]$ и для регулярного решения $u(x, t)$ краевой задачи (19), (20), (2)–(4), (5_λ), (8), (9) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{Q_1} u_{xtt}^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_2} u_{xtt}^2 dxdt + \int_{Q_1} (u_t^2 + u_{xt}^2) dxdt + \int_{Q_2} (u_t^2 + u_{xt}^2) dxdt \\ & \leq M_2 \int_Q (f^2 + f_t^2) dxdt \end{aligned} \quad (28)$$

с постоянной M_2 , определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$, $h(x)$ и $c(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (19) на функцию $\gamma u_{tt}(x, t)$ (число γ определено при доказательстве леммы 1) и проинтегрируем по области Q_1 , далее умножим уравнение (20) на функцию $-u_{tt}(x, t)$ и проинтегрируем по области Q_2 . Сложив полученные выражения и интегрируя по частям, придем к равенству

$$\begin{aligned} & -\varepsilon\gamma h(-0) \int_{Q_1} u_{xtt}^2 dxdt + \varepsilon h(+0) \int_{Q_2} u_{xtt}^2 dxdt - \gamma \int_{Q_1} h(x) u_{xt}^2 dxdt + \int_{Q_2} h(x) u_{xt}^2 dxdt \\ & - \gamma \int_{Q_1} \left[c(x, t) + \frac{1}{2} \varphi'(t) \right] u_t^2 dxdt + \int_{Q_2} \left[c(x, t) + \frac{1}{2} \varphi'(t) \right] u_t^2 dxdt \\ & + \frac{\gamma \varphi(T)}{2} \int_{-1}^0 u_t^2(x, T) dx + \frac{\varphi(0)}{2} \int_0^1 u_t^2(x, 0) dx \\ & = -\gamma \int_{Q_1} f_t u_t dxdt + \int_{Q_2} f_t u_t dxdt + \gamma \int_{Q_1} c_t(x, t) u u_t dxdt - \int_{Q_2} c_t(x, t) u u_t dxdt. \end{aligned}$$

Используя условия леммы, применяя неравенство Юнга и учитывая оценку (25), получим требуемое.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть выполняются условия (21)–(24), (26) и (27). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f(x, 0) = 0$ при $x \in [0, 1]$, $f(x, T) = 0$ при $x \in [-1, 0]$ и для регулярного решения $u(x, t)$ краевой задачи (19), (20), (2)–(4), (5 $_\lambda$), (8), (9) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \int_{Q_1} u_{xtt}^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_1} u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon^2 \int_{Q_2} u_{xtt}^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_2} u_{xxt}^2 dxdt \\ & + \int_{Q_1} u_{xx}^2 dxdt + \int_{Q_2} u_{xx}^2 dxdt \leq M_3 \int_Q (f^2 + f_t^2) dxdt \quad (29) \end{aligned}$$

с постоянной M_3 , определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$, $h(x)$ и $c(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой оценки проводится вполне аналогично доказательству лемм 1 и 2 лишь с тем отличием, что в качестве множителей используются функции $-u_{xx}(x, t)$ и $u_{xx}(x, t)$, $-\varepsilon u_{xtt}(x, t)$ и $\varepsilon u_{xtt}(x, t)$.

Лемма 4. Пусть выполняются (21)–(24), (26) и (27). Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ и для регулярного решения $u(x, t)$ краевой задачи (19), (20), (2)–(4), (5 $_\lambda$), (8), (9) будет выполняться оценка

$$\int_{Q_1} u_{xtt}^2 dxdt + \int_{Q_2} u_{xtt}^2 dxdt \leq M_4 \int_Q f^2 dxdt \quad (30)$$

с постоянной M_4 , определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$, $h(x)$ и $c(x, t)$, а также числом ε .

Доказательство этой леммы проводится с помощью анализа равенств, использованных при доказательстве лемм 1–3, но при этом в равенстве леммы 2 интегрировать по частям функцию $f(x, t)$ не нужно.

Рассмотрим теперь задачи 2_ε – 9_ε . Во всех этих задачах будем считать выполненными условия

$$\varphi(t) \in C^1([0, T]); \quad (31)$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q), \quad (32)$$

а также условия (22)–(24), (26) и (27). Далее потребуем выполнения условий:

для задачи 2_ε :

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) = 0, \quad f(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in [0, 1]; \quad (33)$$

для задачи 3_ε :

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(T) < 0, \quad f(x, T) = 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0]; \quad (34)$$

для задачи 4_ε :

$$\varphi(0) < 0, \quad \varphi(T) < 0, \quad f(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0], \quad f(x, T) = 0 \quad \text{при } x \in [0, 1]; \quad (35)$$

для задачи 5_ε :

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(T) < 0, \quad f(x, T) = 0 \quad \text{при } x \in [0, 1]; \quad (36)$$

для задачи 6_ε :

$$\varphi(0) < 0, \quad \varphi(T) = 0, \quad f(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0]; \quad (37)$$

для задачи 7_ε :

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) < 0, \quad f(x, 0) = f(x, T) = 0 \quad \text{при } x \in [0, 1]; \quad (38)$$

для задачи 8_ε :

$$\varphi(0) < 0, \quad \varphi(T) > 0, \quad f(x, 0) = f(x, T) = 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0]; \quad (39)$$

для задачи 9_ε :

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(T) = 0. \quad (40)$$

Будем обозначать через $2_{\varepsilon, \lambda}$, $3_{\varepsilon, \lambda}$ и т. д. задачи 2_ε , 3_ε , ..., в которых условие (5) заменено условием (5_λ) .

Лемма 5. Для регулярных решений $u(x, t)$ каждой из задач $2_{\varepsilon, \lambda}$, $3_{\varepsilon, \lambda}$, ... при выполнении условий (22)–(24), (26), (27), (31), (32), а также соответствующего условия (33), (34), ... будут выполняться равномерные по ε априорные оценки (25), (28) и (29).

Для доказательства этой леммы достаточно повторить доказательство лемм 1–3.

Лемма 6. Для регулярных решений $u(x, t)$ каждой из задач $2_{\varepsilon, \lambda}, 3_{\varepsilon, \lambda}, \dots$ при выполнении условий (21)–(24), (31), (32), будет выполняться оценка (30) с постоянной M_4 , определяющейся функциями $\varphi(t)$, $h(x)$ и $c(x, t)$, а также числом ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы очевидно.

Заметим также следующее. Используя представление функций $w(x, t)$ и $z(x, t)$ через функцию $u(x, t)$, учитывая оценку (30), нетрудно показать, что будет справедлива оценка

$$\int_{Q_1} w_{xxtt}^2 dxdt + \int_{Q_2} z_{xxtt}^2 dxdt \leq M_5 \int_Q f^2 dxdt \quad (41)$$

с постоянной M_5 , определяющейся функциями $\varphi(t)$, $h(x)$ и $c(x, t)$, а также числом ε .

3. Разрешимость краевых задач 1–9

Как и в предыдущем разделе, основные идеи доказательства разрешимости краевых задач 1–9 покажем на примере краевой задачи 1.

Теорема 1. Пусть выполняются условие (H), условие (12), а также условия (21)–(24), (26) и (27). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f(x, 0) = 0$ при $x \in [0, 1]$, $f(x, T) = 0$ при $x \in [-1, 0]$, краевая задача 1 имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_1)$, $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим краевую задачу: найти функции $w(x, t)$ и $z(x, t)$ такие, что для них выполняются условия (13) и (14), условия (15), (16), (3) и (4), а также условия

$$w_t(x, 0) = 0, \quad x \in (-1, 0), \quad (42)$$

$$z_t(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (43)$$

При фиксированном ε и при $\lambda = 0$ эта задача распадается на две независимые друг от друга задачи, существование регулярных решений которых нетрудно установить с помощью классического метода Галёркина с выбором специального базиса [17] и априорной оценки (41). Далее, из той же оценки (41) и из теоремы о методе продолжения по параметру следует, что краевая задача (13), (14), (15), (16), (3), (4), (42), (43) будет иметь регулярное решение $\{w(x, t), z(x, t)\}$ при всех λ из отрезка $[0, 1]$, т. е. и при $\lambda = 1$.

По функциям $w(x, t)$ и $z(x, t)$ определим функцию $u(x, t)$ при $(x, t) \in Q_1$ и при $(x, t) \in Q_2$ в случае $\lambda = 1$, используя формулы (17) и (18). Для функции $u(x, t)$ будут выполняться уравнения (19) и (20), а также условия (2)–(4), (5), (8), (9). Далее, условия теоремы обеспечивают для решений $u(x, t)$ этой задачи выполнение априорных оценок (25), (28) и (29). Из этих оценок и из свойства рефлексивности гильбертова пространства следует, что существуют последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел и $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ решений задачи (19),

(20), (2)–(4), (5), (8), (9) в случае $\varepsilon = \varepsilon_m$, а также функция $u(x, t)$ такие, что при $m \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &\rightarrow 0, \\ u_m(x, t) &\rightarrow u(x, t) \text{ слабо в } W_2^{2,1}(Q_1) \text{ и слабо в } W_2^{2,1}(Q_2), \\ \varepsilon_m u_{mxxx}(x, t) &\rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q_1) \text{ и слабо в } L_2(Q_2), \\ u_m(-0, t) &\rightarrow u(-0, t), \quad u_m(+0, t) \rightarrow u(+0, t), \quad u_{mx}(-0, t) \rightarrow u_x(-0, t), \\ u_{mx}(+0, t) &\rightarrow u_x(+0, t) \text{ почти всюду на } [0, T]. \end{aligned}$$

Очевидно, что предельная функция $u(x, t)$ будет искомым регулярным решением краевой задачи 1.

Единственность регулярных решений краевой задачи 1 очевидна — следует, например, из оценки (25), справедливой и при $\varepsilon = 0$.

Теорема доказана.

Для краевых задач 2–9 нетрудно получить аналогичные результаты о существовании и единственности регулярных решений. Эти результаты представим в целом следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть выполняются условие (Н), условие (12), условия (21)–(24), (26) и (27), (31) и (32), а также одно из условий (33)–(40). Тогда соответствующая задача 2, 3, ..., 9 будет иметь регулярное решение, причем ровно одно.

Доказательство этой теоремы (точнее говоря, доказательство разрешимости каждой из задач 2, 3, ..., 9) проводится вполне аналогично доказательству теоремы 1 — с помощью перехода к функциям $w(x, t)$ и $z(x, t)$ в регуляризованных задачах, метода продолжения по параметру и априорных оценок (25), (28), (29).

Заключение

В работе исследована разрешимость краевых задач для параболических уравнений второго порядка с переменным направлением эволюции. Особенностью изучаемых уравнений является то, что в них направление эволюции может меняться в зависимости как от пространственных переменных, так и от временной. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Все полученные результаты являются новыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gevrey M. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique // Journ. de Math. (6). 1913. V. 9. P. 305–475.
2. Gevrey M. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (suite) // Journ. de Math. (6). 1914. P. 105–148.
3. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
4. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

5. Попов С. В., Пинигина Н. Р. Регулярная разрешимость параболических уравнений с меняющимся направлением времени с условиями склеивания, содержащими производные первого и второго порядков // Мат. заметки ЯГУ. 2005. Т. 12, № 2. С. 52–59.
6. Кожанов А. И., Потапова С. В. Краевые задачи для двумерных по временным переменным дифференциальных уравнений нечетного порядка с меняющимся направлением эволюции // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 1098–1115.
7. Fichera G. On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order // Boundary Problems in Differential Equations. Madison, WI: Univ. Wisconsin Press, 1960. P. 97–120.
8. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ. М.: ВИНТИ, 1971.
9. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
10. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1983.
11. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
12. Кожанов А. И., Мациевская Е. Е. Вырождающиеся параболические уравнения с переменным направлением эволюции // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 718–731.
13. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
14. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
15. Triebel H. Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.
16. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
17. Lions J. L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod; Gauthier-Villars, 1969.

Пинигина Нюргуяна Романовна
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 42, Якутск 677007

PARABOLIC EQUATIONS WITH
ARBITRARY DIRECTION OF EVOLUTION
AND DISCONTINUOUS COEFFICIENT

N. R. Pinigina

Abstract: We study boundary value problems (BVP) for parabolic equations with changing direction of evolution. An essential feature of our equations is a discontinuous and sign changing coefficient with a first-kind discontinuity. Depending on the coefficients, we propose correct BVP formulations and prove existence and uniqueness of regular solutions to these BVPs.

DOI: 10.5281/zenodo.2301816685

Keywords: parabolic equation with changing direction of evolution, discontinuous coefficient, boundary value problems, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. Gevrey M., “Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique,” *Journ. de Math.* (6), **9**, 305–475 (1913).
2. Gevrey M., “Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (suite),” *Journ. de Math.* (6), **10**, 105–148 (1914).
3. Tersenov S. A., *Parabolic Equations with Changing Time Direction* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1985).
4. Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V., *Non-Classical Differential-Operator Equations* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).
5. Popov S. V. and Pinigina N. R., “Regular solvability of parabolic equations with changing time direction with a gluing condition containing first- and second-order derivatives [in Russian],” *Mat. Zamet. YaGU*, **12**, No. 2, 52–59 (2005).
6. Kozhanov A. I. and Potapova S. V., “Boundary value problems for odd order forward-backward-type differential equations with two time variables,” *Sib. Math. J.*, **59**, No. 5, 870–884 (2018).
7. Fichera G., “On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order,” in: *Boundary Problems in Differential Equations*, pp. 97–120, Univ. Wisconsin Press, Madison, WI (1960).
8. Oleinik O. A. and Radkevich E. V., *Second-Order Equations with a Non-Negative Characteristic Form* [in Russian], Itogi Nauki, Ser. Matematika, Mat. Analiz, VINITI, Moscow (1971).
9. Vragov V. N., “On the theory of boundary value problems for equations of mixed type [in Russian],” *Differ. Uravn.*, **13**, No. 6, 1098–1105 (1977).
10. Vragov V. N., *Boundary Value Problems for Equations of Mathematical Physics* [in Russian], Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (1983).
11. Egorov I. E. and Fedorov V. E., *Non-Classical Higher-Order Equations of Mathematical Physics* [in Russian], Izdat. Vychisl. Tsentra SO RAN, Novosibirsk (1995).
12. Kozhanov A. I. and Matsyevskaya E. E., “Degenerate parabolic equations with variable direction of evolution [in Russian],” *Sib. Electron. Math. Rep.*, **16**, 718–731 (2019).

-
13. *Sobolev S. L.*, Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991) (Transl. Math. Monogr.; vol. 90).
 14. *Ladyzhenskaya O. A. and Ural'tseva N. N.*, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Acad. Press, New York (1968) (Ser. Math. Sci. Eng.; vol. 46).
 15. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Functional Spaces, Differential Operators, VEB Deutsch. Verl. Wiss., Berlin (1978).
 16. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).
 17. *Lions J. L.*, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod; Gauthier-Villars, Paris (1969).

Nyurguyana R. Pinigina
Ammosov North-Eastern Federal University,
42 Kulakovsky Street, Yakutsk 677007
Republic of Sakha (Yakutia), Russia