

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. И. Матвеева, Е. Б. Мамбетниязов

Аннотация. Рассматривается класс систем нелинейных интегродифференциальных уравнений. Исследуется экспоненциальная устойчивость нулевого решения. Установлены условия устойчивости, получены оценки множеств притяжения и оценки, характеризующие скорости убывания решений на бесконечности. При проведении исследований используется функционал Ляпунова — Красовского специального вида.

DOI: 10.5281/zenodo.2301816592

Ключевые слова: система с запаздыванием, экспоненциальная устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского, множество притяжения.

*Посвящается Ивану Егоровичу Егорову
по случаю его 75-летия*

Введение

В работе рассматриваются системы интегродифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \sum_{j=1}^m \left(B_j y(t - \tau_j) + \int_{t-\tau_j}^t D_j(t-s)y(s) ds \right) + F(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_m)), \quad t > 0, \quad (0.1)$$

где A, B_j — постоянные матрицы размера $n \times n$, $D_j(s)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными элементами, $s \in [0, \tau_j]$, $j = 1, \dots, m$, $0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$, $F(t, u) = F(t, u_0, u_1, \dots, u_m)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, определяющая нелинейные слагаемые в системе (0.1), удовлетворяет локальному условию Липшица по u_0 и $F(t, 0) \equiv 0$. В литературе системы вида (0.1) называют системами с двумя видами запаздывания: сосредоточенное и распределенное. Запаздывания определяются параметрами $\tau_1, \dots, \tau_m$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2026-0028).

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных изучению устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздыванием (например, см. книги [1–11] и имеющуюся в них библиографию). Одним из методов, который активно используется при исследовании устойчивости, является метод функционалов Ляпунова — Красовского. Однако не каждый функционал Ляпунова — Красовского позволяет получать оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности. В последние годы исследования в этом направлении активно развиваются. Большая часть работ посвящена линейным уравнениям. Исследования нелинейных систем сопряжены с существенными трудностями. В работах Г. В. Демиденко и И. И. Матвеевой были предложены различные функционалы Ляпунова — Красовского, которые позволили провести исследования устойчивости решений некоторых классов нелинейных систем с запаздыванием, в том числе неавтономных (например, см. [12–17]).

В этой работе мы рассматриваем класс систем нелинейных уравнений с несколькими запаздываниями двух видов (сосредоточенное и распределенное), причем этот класс включает системы с нелинейными слагаемыми по всем функциям $y(t)$, $y(t - \tau_j)$, $j = 1, \dots, m$. При проведении исследований будем использовать функционал Ляпунова — Красовского

$$V(t, y) = \langle Hy(t), y(t) \rangle + \sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_j}^t \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \quad (0.2)$$

который является обобщением функционала, введенного в [12] для систем с одним запаздыванием. Модификации функционала (0.2) были использованы для исследования устойчивости решений систем нейтрального типа с несколькими сосредоточенными запаздываниями в работах [18, 19].

В § 1 указаны условия экспоненциальной устойчивости линейных систем ($F(t, u) \equiv 0$), в § 2 исследована устойчивость нелинейных систем вида (0.1).

§ 1. Линейные системы

В этом параграфе рассматриваются линейные системы с запаздываниями следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \sum_{j=1}^m \left(B_j y(t - \tau_j) + \int_{t-\tau_j}^t D_j(t-s)y(s) ds \right), \quad (1.1)$$

где A , B_j — постоянные матрицы размера $n \times n$, $D_j(s)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами, $s \in [0, \tau_j]$, $j = 1, \dots, m$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ — запаздывания. Мы укажем условие экспоненциальной устойчивости нулевого решения и оценку на скорость убывания решений системы (1.1) на бесконечности.

Для формулировки утверждений введем некоторые обозначения. Пусть матрицы H и $K_j(s)$ размера $n \times n$ такие, что

$$\begin{aligned} H = H^* > 0, \quad K_j(s) \in C^1([0, \tau_j]), \\ K_j(s) = K_j(s)^* \geq 0, \quad \frac{d}{ds} K_j(s) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Определим матрицы

$$Q_j(s) = \begin{pmatrix} Q_{11}^j(s) & Q_{12}^j(s) & Q_{13}^j(s) \\ (Q_{12}^j(s))^* & Q_{22}^j(s) & Q_{23}^j(s) \\ (Q_{13}^j(s))^* & (Q_{23}^j(s))^* & Q_{33}^j(s) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

с элементами

$$Q_{11}^j(s) = -(\xi_j(HA + A^*H) + K_j(0)), \quad \text{где} \quad \sum_{j=1}^m \xi_j = 1, \quad \xi_j > 0,$$

$$Q_{12}^j(s) = -HB_j, \quad Q_{13}^j(s) = -\tau_j HD_j(s),$$

$$Q_{22}^j(s) = K_j(\tau_j), \quad Q_{23}^j(s) = 0, \quad Q_{33}^j(s) = -\tau_j \frac{d}{ds} K_j(s).$$

Рассмотрим начальную задачу для линейной системы (1.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= Ay(t) + \sum_{j=1}^m \left(B_j y(t - \tau_j) + \int_{t-\tau_j}^t D_j(t-s) y(s) ds \right), \quad t > 0, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau_m, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\varphi(t) \in C([-\tau_m, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция.

Имеет место следующий результат.

Теорема 1.1. Пусть существуют матрицы H и $K_j(s)$, удовлетворяющие условиям (1.2) и такие, что выполнены неравенства

$$\left\langle Q_j(s) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \geq p_j \langle Hu, u \rangle + r_j \tau_j \langle K_j(s)w, w \rangle, \quad (1.5)$$

$$u, v, w \in \mathbb{R}^n, \quad s \in [0, \tau_j],$$

где $p_j, r_j > 0, j = 1, \dots, m$. Тогда нулевое решение линейной системы (1.1) экспоненциально устойчиво и для решения $y(t)$ задачи (1.4) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} e^{-\frac{\gamma t}{2}}, \quad (1.6)$$

где

$$V(0, \varphi) = \langle H\varphi(0), \varphi(0) \rangle + \sum_{j=1}^m \int_{-\tau_j}^0 \langle K_j(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle ds, \quad (1.7)$$

$$\gamma = \min \left\{ \sum_{j=1}^m p_j, r_1, \dots, r_m \right\} > 0, \quad (1.8)$$

h — минимальное собственное значение матрицы H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — решение задачи (1.4). Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (0.2) на $y(t)$

$$V(t, y(t)) = \langle Hy(t), y(t) \rangle + \sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_j}^t \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle ds.$$

Дифференцируя функционал $V(t, y(t))$ по t и учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (1.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y(t)) &= \left\langle \left(HA + A^*H + \sum_{j=1}^m K_j(0) \right) y(t), y(t) \right\rangle \\ &+ \left\langle \sum_{j=1}^m HB_j y(t - \tau_j), y(t) \right\rangle + \left\langle Hy(t), \sum_{j=1}^m B_j y(t - \tau_j) \right\rangle \\ &+ \left\langle \sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_j}^t HD_j(t-s)y(s) ds, y(t) \right\rangle + \left\langle Hy(t), \sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_j}^t D_j(t-s)y(s) ds \right\rangle \\ &- \sum_{j=1}^m \langle K_j(\tau_j)y(t - \tau_j), y(t - \tau_j) \rangle + \sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_j}^t \left\langle \frac{d}{dt} K_j(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Используя матрицы $Q_j(s)$, определенные в (1.3), получаем

$$\frac{d}{dt} V(t, y(t)) = - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\tau_j} \int_{t-\tau_j}^t \left\langle Q_j(t-s) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_j) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_j) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

В силу условия (1.5) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y(t)) &\leq - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\tau_j} \int_{t-\tau_j}^t [p_j \langle Hy(t), y(t) \rangle + r_j \tau_j \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle] ds \\ &= - \sum_{j=1}^m p_j \langle Hy(t), y(t) \rangle - \sum_{j=1}^m r_j \int_{t-\tau_j}^t \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} V(t, y(t)) \leq -\gamma V(t, y(t)),$$

где $\gamma > 0$ определено в (1.8). Из этого дифференциального неравенства получаем

$$V(t, y(t)) \leq V(0, \varphi) e^{-\gamma t}.$$

Поскольку матрицы H и $K_j(s)$ удовлетворяют условиям (1.2), в силу определения функционала $V(t, y)$ имеем

$$h\|y(t)\|^2 \leq \langle Hy(t), y(t) \rangle \leq V(t, y(t)),$$

где $h > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H . Тогда

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} e^{-\frac{\gamma t}{2}}.$$

Теорема 1.1 доказана.

§ 2. Нелинейные системы

В этом параграфе получены условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения нелинейной системы (0.1), оценки на множества притяжения, а также оценки, характеризующие скорость убывания решений системы (0.1). Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1.1 и $F(t, u)$ удовлетворяет оценке

$$2\langle Hu_0, F(t, u) \rangle \leq \langle Hu_0, u_0 \rangle \sum_{j=0}^m q_j \|u_j\|^{\omega_j}, \quad u_j \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

где $q_j \geq 0$, $\omega_j \geq 0$, $j = 0, \dots, m$. Исследование экспоненциальной устойчивости проведем отдельно при $\omega_0 = 0$ и $\omega_0 > 0$.

Рассмотрим начальную задачу для нелинейной системы (0.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= Ay(t) + \sum_{j=1}^m \left(B_j y(t - \tau_j) + \int_{t-\tau_j}^t D_j(t-s)y(s) ds \right) \\ &+ F(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_m)), \quad t > 0, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau_m, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\varphi(t) \in C([- \tau_m, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция.

Имеет место следующий результат.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и $\omega_0 = 0$ в (2.1). Если выполнено неравенство

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^m (p_j - q_j \sigma_1^{\omega_j}) - q_0 > 0, \quad \sigma_1 > 0, \quad (2.3)$$

то нулевое решение системы (0.1) экспоненциально устойчиво и множество вещественнозначных вектор-функций

$$\mathcal{E}_1 = \{ \varphi(t) \in C([- \tau_m, 0]) : \max_{t \in [- \tau_m, 0]} \|\varphi(t)\| \leq \sigma_1, \quad V(0, \varphi) \leq \sigma_1^2 h \}$$

является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения $y(t)$ задачи (2.2) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$ имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} e^{-\frac{\gamma_1 t}{2}}, \quad t > 0, \quad (2.4)$$

где $V(0, \varphi)$ определено в (1.7),

$$\gamma_1 = \min \{\alpha_1, r_1, \dots, r_m\} > 0. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — решение задачи (2.2), определенное при $t \in [-\tau_m, t_1)$, где $t_1 > 0$. Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (0.2) на $y(t)$. Продифференцируем функционал $V(t, y(t))$ по t . Проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве теоремы 1.1, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t, y(t)) = - \sum_{j=1}^m \frac{1}{\tau_j} \int_{t-\tau_j}^t \left\langle Q_j(t-s) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_j) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_j) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds + W(t),$$

где матрицы $Q_j(s)$ определены в (1.5),

$$W(t) = 2 \langle Hy(t), F(t, y(t), y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_m)) \rangle.$$

В силу (2.1) при $\omega_0 = 0$ имеем

$$W(t) \leq \left(q_0 + \sum_{j=1}^m q_j \|y(t-\tau_j)\|^{\omega_j} \right) \langle Hy(t), y(t) \rangle.$$

Тогда с учетом условий (1.5) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, y(t)) &\leq - \left(\sum_{j=1}^m (p_j - q_j \|y(t-\tau_j)\|^{\omega_j}) - q_0 \right) \langle Hy(t), y(t) \rangle \\ &\quad - \sum_{j=1}^m r_j \int_{t-\tau_j}^t \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \quad t \in (0, t_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Докажем, что если начальная вектор-функция $\varphi(t)$ из множества $\mathcal{E}_1$, то решение $y(t)$ начальной задачи (2.2) существует на всей полупрямой $\{t > 0\}$ и для него верна оценка (2.4).

Сначала докажем, что $t_1 > \tau_1$. Предположим, что $t_1 \in (0, \tau_1]$. Поскольку $y(t)$ — непродолжаемое решение начальной задачи (2.2), то по теореме о покидании компакта имеем

$$\|y(t)\| \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow t_1 - 0. \quad (2.7)$$

Поскольку $-\tau_j < t - \tau_j < t_1 - \tau_j \leq \tau_1 - \tau_j \leq 0$ при $t \in (0, t_1)$, то

$$y(t - \tau_j) = \varphi(t - \tau_j), \quad j = 1, \dots, m.$$

Если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, то

$$\|y(t - \tau_j)\| = \|\varphi(t - \tau_j)\| \leq \sigma_1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда неравенство (2.6) при $t \in (0, t_1)$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}V(t, y(t)) \leq -\alpha_1 \langle Hy(t), y(t) \rangle - \sum_{j=1}^m r_j \int_{t-\tau_j}^t \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \quad (2.8)$$

где α_1 определено в (2.3). Используя γ_1 , введенное в (2.5), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t, y(t)) \leq -\gamma_1 V(t, y(t)).$$

Из этого дифференциального неравенства имеем

$$V(t, y(t)) \leq V(0, \varphi)e^{-\gamma_1 t}, \quad t \in (0, t_1).$$

Используя определение функционала (0.2), для решения $y(t)$ задачи (2.2) получаем оценку

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} e^{-\frac{\gamma_1 t}{2}}, \quad t \in (0, t_1), \quad (2.9)$$

где $h > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H . Очевидно, что функция, стоящая в правой части неравенства (2.9), является непрерывной и ограниченной при $t \in [0, T]$ для любого $T > 0$. Это противоречит предположению (2.7). Следовательно, $t_1 > \tau_1$ и для решения $y(t)$ задачи (2.2) верна оценка (2.4) при $t \in (0, t_1)$.

Докажем, что $t_1 > 2\tau_1$. Рассуждения будем проводить от противного. Предположим, что $t_1 \leq 2\tau_1$. Поскольку $y(t)$ — непродолжаемое решение начальной задачи (2.2), по теореме о покидании компакта имеем

$$\|y(t)\| \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow t_1 - 0. \quad (2.10)$$

Обозначим через $y_1(s)$ решение начальной задачи (2.2) при $s \in (0, \tau_1]$. Поскольку

$$-\tau_j < t - \tau_j < t_1 - \tau_j \leq 2\tau_1 - \tau_j \leq \tau_1, \quad j = 1, \dots, m,$$

при $t \in (0, t_1)$, то возможны два случая: $t_1 - \tau_j \leq 0$ и $t_1 - \tau_j > 0$. Если $t_1 - \tau_j \leq 0$, то

$$y(t - \tau_j) = \varphi(t - \tau_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

и при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$ имеем

$$\|y(t - \tau_j)\| \leq \sigma_1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если $t_1 - \tau_j > 0$, то

$$y(t - \tau_j) = \begin{cases} \varphi(t - \tau_j) & \text{при } t - \tau_j \in (-\tau_j, 0], \\ y_1(t - \tau_j) & \text{при } t - \tau_j \in (0, t_1 - \tau_j). \end{cases}$$

Из предыдущего шага известно, что для $y_1(t - \tau_j)$ верна оценка вида (2.9). Следовательно,

$$\|y_1(t - \tau_j)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} e^{-\frac{\gamma_1(t - \tau_j)}{2}} \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}}, \quad 0 < t - \tau_j < t_1 - \tau_j.$$

По определению множества $\mathcal{E}_1$ из этого неравенства вытекает оценка

$$\|y_1(t - \tau_j)\| \leq \sigma_1.$$

Следовательно,

$$\|y(t - \tau_j)\| \leq \sigma_1, \quad t \in (0, t_1), \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда из неравенства (2.6) вытекает оценка (2.8), из которой имеем

$$\frac{d}{dt}V(t, y(t)) \leq -\gamma_1 V(t, y(t)), \quad t \in (0, t_1),$$

где γ_1 определено в (2.5). Как и ранее, это дает оценку

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} e^{-\frac{\gamma_1 t}{2}}, \quad t \in (0, t_1).$$

Как отмечалось выше, функция, стоящая в правой части неравенства, является непрерывной и ограниченной при $t \in [0, T]$ для любого $T > 0$. Это противоречит (2.10). Следовательно, $t_1 > 2\tau_1$.

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что решение $y(t)$ задачи (2.2) определено на полупрямой $\{t > 0\}$ и для него верна оценка (2.4).

Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если $q_0 = 0$, то результат об экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (0.1) также вытекает из теоремы 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если вектор-функция $F(t, u_0, \dots, u_m)$ такова, что

$$\langle Hu_0, F(t, u_0, \dots, u_m) \rangle \leq 0,$$

то в (2.1) можно взять $q_j = 0$, $j = 0, \dots, m$. Следовательно, в (2.3) σ_1 можно выбрать любым. Тогда утверждение теоремы 2.1 переходит в утверждение теоремы 1.1, при этом на начальную функцию $\varphi(t) \in C([- \tau_m, 0])$ не возникает дополнительных ограничений.

Рассмотрим случай, когда $\omega_0 > 0$, $q_0 > 0$ в условии (2.1).

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и $\omega_0 > 0$ в (2.1). Если выполнено неравенство

$$\alpha_2 = \sum_{j=1}^m (p_j - q_j \sigma_2^{\omega_j}) > 0, \quad \sigma_2 > 0, \quad (2.11)$$

то нулевое решение системы (0.1) экспоненциально устойчиво и множество вещественнозначных вектор-функций

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ \varphi(t) \in C([- \tau_m, 0]) : \max_{t \in [- \tau_m, 0]} \|\varphi(t)\| \leq \sigma_2, \quad V(0, \varphi) \leq h \left(\frac{q_0}{\gamma_2} + \frac{1}{\sigma_2^{\omega_0}} \right)^{-\frac{2}{\omega_0}} \right\}$$

является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения $y(t)$ задачи (2.2) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$ имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} \left(1 - \frac{q_0}{\gamma_2 h^{\frac{\omega_0}{2}}} V(0, \varphi)^{\frac{\omega_0}{2}} \right)^{-\frac{1}{\omega_0}} e^{-\frac{\gamma_2 t}{2}}, \quad (2.12)$$

где $V(0, \varphi)$ определено в (1.7),

$$\gamma_2 = \min \{\alpha_2, r_1, \dots, r_m\} > 0. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — решение задачи (2.2), определенное при $t \in [-\tau_m, t_2)$, где $t_2 > 0$. Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (0.2) на $y(t)$. Дифференцируя функционал $V(t, y(t))$ по t и проводя такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 2.1, приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt} V(t, y(t)) \leq - \sum_{j=1}^m p_j \langle Hy(t), y(t) \rangle - \sum_{j=1}^m r_j \int_{t-\tau_j}^t \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle ds + W(t),$$

где

$$W(t) = 2 \langle Hy(t), F(t, y(t), y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_m)) \rangle.$$

В силу (2.1) имеем оценку

$$W(t) \leq \left(q_0 \|y(t)\|^{\omega_0} + \sum_{j=1}^m q_j \|y(t-\tau_j)\|^{\omega_j} \right) \langle Hy(t), y(t) \rangle.$$

Очевидно,

$$\|y(t)\| \leq h^{-\frac{1}{2}} \langle Hy(t), y(t) \rangle^{\frac{1}{2}} \leq h^{-\frac{1}{2}} V(t, y(t))^{\frac{1}{2}},$$

где $h > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H . Тогда при $\omega_0 > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y(t)) \leq & - \sum_{j=1}^m [p_j - q_j \|y(t-\tau_j)\|^{\omega_j}] \langle Hy(t), y(t) \rangle + q_0 h^{-\frac{\omega_0}{2}} V(t, y(t))^{1+\frac{\omega_0}{2}} \\ & - \sum_{j=1}^m r_j \int_{t-\tau_j}^t \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \quad t \in (0, t_2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Докажем, что если начальная вектор-функция $\varphi(t)$ из множества $\mathcal{E}_2$, то решение $y(t)$ начальной задачи (2.2) существует на всей полупрямой $\{t > 0\}$ и для него верна оценка (2.12).

Сначала докажем, что $t_2 > \tau_1$. Предположим, что $t_2 \leq \tau_1$. Поскольку $y(t)$ — непродолжаемое решение начальной задачи (2.2), по теореме о покидании компакта имеем

$$\|y(t)\| \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow t_2 - 0. \quad (2.15)$$

Поскольку $-\tau_j < t - \tau_j < t_2 - \tau_j \leq \tau_1 - \tau_j \leq 0$, $j = 1, \dots, m$, при $t \in (0, t_2)$, то

$$y(t - \tau_j) = \varphi(t - \tau_j).$$

Если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то

$$\|y(t - \tau_j)\| = \|\varphi(t - \tau_j)\| \leq \sigma_2, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда из неравенства (2.14) при $t \in (0, t_2)$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y(t)) \leq & -\alpha_2 \langle Hy(t), y(t) \rangle - \sum_{j=1}^m r_j \int_{t-\tau_j}^t \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle ds \\ & + \frac{q_0}{h^{\frac{\omega_0}{2}}} V(t, y(t))^{1+\frac{\omega_0}{2}}, \end{aligned}$$

где $\alpha_2 > 0$ определено в (2.11). Обозначим $\beta = q_0 h^{-\frac{\omega_0}{2}}$. Тогда

$$\frac{d}{dt} V(t, y(t)) \leq -\gamma_2 V(t, y(t)) + \beta V(t, y(t))^{1+\frac{\omega_0}{2}},$$

где $\gamma_2 > 0$ определено в (2.13). По определению $V(t, y) > 0$ при $y \neq 0$. Тогда из этого дифференциального неравенства получаем

$$V(t, y(t))^{-\frac{\omega_0}{2}} \geq \left(V(0, \varphi)^{-\frac{\omega_0}{2}} - \frac{\beta}{\gamma_2} \right) e^{\frac{\omega_0 \gamma_2}{2} t} + \frac{\beta}{\gamma_2}.$$

Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то

$$\frac{1}{V(0, \varphi)^{\frac{\omega_0}{2}}} - \frac{\beta}{\gamma_2} > 0.$$

Следовательно,

$$V(t, y(t)) \leq \left(\frac{1}{V(0, \varphi)^{\frac{\omega_0}{2}}} - \frac{\beta}{\gamma_2} \right)^{-\frac{2}{\omega_0}} e^{-\gamma_2 t}.$$

В силу определения функционала $V(t, y)$ отсюда вытекает оценка на решение $y(t)$ начальной задачи (2.2)

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma_2} V(0, \varphi)^{\frac{\omega_0}{2}} \right)^{-\frac{1}{\omega_0}} e^{-\frac{\gamma_2 t}{2}}, \quad t \in (0, t_2). \quad (2.16)$$

Очевидно, что функция, стоящая в правой части неравенства (2.16), является непрерывной и ограниченной при $t \in [0, T]$ для любого $T > 0$. Это противоречит предположению (2.15). Следовательно $t_2 > \tau_1$.

Теперь докажем, что $t_2 > 2\tau_1$. Рассуждения также проведем от противного. Предположим, что $t_2 \leq 2\tau_1$. Поскольку $y(t)$ — непродолжаемое решение начальной задачи (2.2), по теореме о покидании компакта имеем

$$\|y(t)\| \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow t_2 - 0. \quad (2.17)$$

Обозначим через $y_1(s)$ решение задачи (2.2) при $s \in (0, \tau_1]$. Поскольку

$$-\tau_j < t - \tau_j < t_2 - \tau_j \leq 2\tau_1 - \tau_j \leq \tau_1, \quad j = 1, \dots, m,$$

при $t \in (0, t_2)$, возможны два случая: $t_2 - \tau_j \leq 0$ и $t_2 - \tau_j > 0$. Если $t_2 - \tau_j \leq 0$, то

$$y(t - \tau_j) = \varphi(t - \tau_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

и при $\varphi \in \mathcal{E}_2$ имеем

$$\|y(t - \tau_j)\| \leq \sigma_2, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если $t_2 - \tau_j > 0$, то

$$y(t - \tau_j) = \begin{cases} \varphi(t - \tau_j) & \text{при } t - \tau_j \in (-\tau_j, 0], \\ y_1(t - \tau_j) & \text{при } t - \tau_j \in (0, t_2 - \tau_j). \end{cases}$$

Из предыдущего шага известно, что для $y_1(t - \tau_j)$ верна оценка (2.16). Следовательно,

$$\begin{aligned} \|y_1(t - \tau_j)\| &\leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma_2} V(0, \varphi)^{\frac{\omega_0}{2}}\right)^{-\frac{1}{\omega_0}} e^{-\frac{\gamma_2(t - \tau_j)}{2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma_2} V(0, \varphi)^{\frac{\omega_0}{2}}\right)^{-\frac{1}{\omega_0}}, \quad 0 < t - \tau_j < t_2 - \tau_j. \end{aligned}$$

По определению множества $\mathcal{E}_2$ из этого неравенства вытекает оценка

$$\|y_1(t - \tau_j)\| \leq \sigma_2, \quad j = 1, \dots, m.$$

Следовательно,

$$\|y(t - \tau_j)\| \leq \sigma_2, \quad t \in (0, t_2), \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда из неравенства (2.14) вновь получаем оценку

$$\frac{d}{dt} V(t, y(t)) \leq -\gamma_2 V(t, y(t)) + \beta V(t, y(t))^{1 + \frac{\omega_0}{2}}, \quad t \in (0, t_2),$$

где γ_2 определено в (2.13). Как и ранее, это дает оценку

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h}} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma_2} V(0, \varphi)^{\frac{\omega_0}{2}}\right)^{-\frac{1}{\omega_0}} e^{-\frac{\gamma_2 t}{2}}, \quad t \in (0, t_2).$$

Поскольку функция, стоящая в правой части неравенства, является непрерывной и ограниченной при $t \in [0, T]$ для любого $T > 0$, вновь приходим к противоречию с (2.17). Следовательно, $t_2 > 2\tau_1$.

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что непродолжаемое решение $y(t)$ задачи (2.2) определено на полупрямой $\{t > 0\}$ и для него верна оценка (2.12).

Теорема 2.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольд Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. Корневский Д. Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наук. думка, 1989.
4. Избранные труды Н. В. Азбелева. М.; Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2012.
5. Долгий Ю. Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1996.
6. Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. Introduction to the theory and applications of functional differential Equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (Math. Appl.; V. 463).
7. Michiels W., Niculescu S. I. Stability, control, and computation for time-delay systems. An eigenvalue-based approach. Philadelphia, PA: SIAM, 2014. (Adv. Des. Control; V. 27).

8. Agarwal R. P., Berezhansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer, 2012.
9. Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Control Engineering. New York: Birkhäuser; Springer, 2013.
10. Gil' M. I. Stability of neutral functional differential equations. Paris: Atlantis Press, 2014. (Atlantis Stud. Differ. Equ.; V. 3).
11. Park J. H., Lee T. H., Liu Y., Chen J. Dynamic systems with time delays: stability and control. Singapore: Springer, 2019.
12. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
13. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
14. Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А. Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.
15. Матвеева И. И. Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.
16. Матвеева И. И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 579–594.
17. Матвеева И. И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с сосредоточенным и распределенным запаздываниями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2024. Т. 64, № 8. С. 1486–1499.
18. Demidenko G. V., Matveeva I. I. Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2015. V. 83. P. 1–22.
19. Матвеева И. И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

Матвеева Инесса Изотовна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Мамбетниязов Ерназар Базарбаевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

STABILITY OF SOLUTIONS
TO A CLASS OF SYSTEMS
OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS
I. I. Matveeva and E. B. Mambetniyazov

Abstract: A class of systems of nonlinear integro-differential equations is considered and the exponential stability of the zero solution is studied. With the use of a special Lyapunov–Krasovskii functional, we establish stability conditions, estimates for attraction sets, and estimates characterizing decay rates of solutions at infinity.

DOI: 10.5281/zenodo.2301816592

Keywords: delay system, exponential stability, Lyapunov–Krasovskii functional, attraction set.

REFERENCES

1. Elsgolts L. E. and Norkin S. B., Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments, Acad. Press, New York; London (1973).
2. Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations, Springer, New York; Heidelberg; Berlin (1977).
3. Korenevskii D. G., Stability of Dynamical Systems under Random Perturbations of Parameters, Algebraic Criteria [in Russian], Nauk. Dumka, Kiev (1989).
4. Azbelev N. V., Selected Works [in Russian], Inst. Komp'ut. Issled., Moscow; Izhevsk (2012).
5. Dolgii Yu. F., Stability of Periodic Differential-Difference Equations [in Russian], Ural. Gos. Univ., Yekaterinburg (1996).
6. Kolmanovskii V. B. and Myshkis A. D., Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999). (Math. Appl., vol. 463).
7. Michiels W. and Niculescu S. I., Stability, Control, and Computation for Time-delay Systems, An Eigenvalue-Based Approach, SIAM, Philadelphia, PA (2014) (Adv. Des. Control; vol. 27).
8. Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., and Domoshnitsky A., Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications, Springer, New York (2012).
9. Kharitonov V. L., Time-Delay Systems, Lyapunov Functionals and Matrices, Control Engineering, Birkhäuser; Springer, New York (2013).
10. Gil' M. I., Stability of Neutral Functional Differential Equations, Atlantis Press, Paris (2014) (Atlantis Stud. Differ. Equ.; vol. 3).
11. Park J. H., Lee T. H., Liu Y., and Chen J., Dynamic Systems with Time Delays: Stability and Control, Springer, Singapore (2019).
12. Demidenko G. V. and Matveeva I. I., "Asymptotic properties of solutions to delay differential equations [in Russian]," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **5**, No. 3, 20–28 (2005).
13. Demidenko G. V. and Matveeva I. I., "Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms," Sib. Math. J., **48**, No. 5, 824–836 (2007).
14. Demidenko G. V., Matveeva I. I., and Skvortsova M. A., "Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms," Sib. Math. J., **60**, No. 5, 828–841 (2019).

-
15. *Matveeva I. I.*, “Estimates of exponential decay of solutions to one class of nonlinear systems of neutral type with periodic coefficients,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **60**, No. 4, 601–609 (2020).
 16. *Matveeva I. I.*, “Estimates for solutions to a class of nonautonomous systems of neutral type with unbounded delay,” *Sib. Math. J.*, **62**, No. 3, 468–481 (2021).
 17. *Matveeva I. I.*, “Estimates of solutions for a class of nonautonomous systems of neutral type with concentrated and distributed delays,” *Comput. Math. Math. Phys.*, **64**, No. 8, 1796–1808 (2024).
 18. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, “Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays,” *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **83**, 1–22 (2015).
 19. *Matveeva I. I.*, “On the exponential stability of solutions of periodic systems of the neutral type with several delays,” *Differ. Equ.*, **53**, No. 6, 725–735 (2017).

Inessa I. Matveeva
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090;
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptiyug Avenue, Novosibirsk 630090

Ernazar B. Mambetniyazov
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090