

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ
УСЛОВИЕМ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. Е. Егоров, С. В. Сафонов

Аннотация. Рассматривается нелокальная вторая краевая задача для уравнения смешанного типа в цилиндрической области, которая сводится к разрешимости локальной краевой задачи для интегродифференциального уравнения смешанного типа в весовом пространстве Соболева. Разрешимость последней краевой задачи устанавливается с помощью метода последовательных приближений. При некоторых условиях на коэффициенты уравнения доказана теорема об однозначной регулярной разрешимости нелокальной второй краевой задачи в весовом пространстве Соболева, когда коэффициент при второй производной по времени может менять знак на верхнем основании цилиндрической области и отрицательный на нижнем основании.

DOI: 10.5281/zenodo.2301816382

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальная вторая краевая задача, разрешимость, неравенство, оценка.

1. Введение

В работах [1–4] разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа второго порядка изучалась с помощью сингулярных интегральных уравнений. В работах [5–8] для исследования разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа привлечены функциональные методы и метод регуляризации, но результаты регулярной разрешимости краевых задач получены при знакоопределенности коэффициентов уравнения при старшей производной по времени вблизи основания цилиндрической области. В работе [9] доказано существование регулярного решения краевой задачи Врагова [8] в подходящем весовом пространстве, когда на знаки коэффициентов при старшей производной по времени не накладывается никаких ограничений.

В данной работе рассматривается нелокальная вторая краевая задача для уравнения смешанного типа, когда коэффициент при второй производной по времени меняет знак на верхнем основании и отрицательный на нижнем основании цилиндрической области. Для исследования нелокальной второй краевой

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSRG-2026-0009.

задачи используется метод работы [10] и результаты [11]. При определенных условиях на коэффициенты уравнения смешанного типа доказано существование единственного решения нелокальной второй краевой задачи в весовом пространстве Соболева.

2. Постановка нелокальной второй краевой задачи и предварительные сведения

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей S . Положим

$$Q = \Omega \times (0, T), \quad \Gamma = S \times (0, T), \quad 0 < T < \infty.$$

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами в $\overline{Q}$. Введем множества

$$\Omega_T^\pm = \{(x, t) : k(x, t) \gtrless 0, \ x \in \Omega\}.$$

Будем считать, что $k(x, 0) < 0$, $x \in \overline{Q}$ и $N(t)$ — заданная непрерывная функция на $[0, T]$.

Вторая краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \quad u_t|_{t=0} = \int_0^T N(\tau)u(x, \tau) d\tau, \quad u_t|_{\Omega_T^-} = 0. \quad (2)$$

Введем обозначения $k_T(x) = k(x, T)$, и пусть выполнено неравенство

$$|\nabla k_T(x)|^2 \leq R_0 |k_T(x)|, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad R_0 > 0.$$

Определим вес $R(x, t)$ следующим образом [11]:

$$R(x, t) = |k_T(x)| + T - t.$$

Введем весовое пространство Соболева

$$W_{\mathcal{L}} = \{u(x, t) \in W_2^1(Q) : \Delta u \in L_2(Q); \ u_{tx_i} \in L_2(Q), \ i = \overline{1, n}; \ R^{1/2}u_{tt} \in L_2(Q)\}$$

с нормой

$$\|u\|_L^2 = \|u\|_1^2 + \int_Q \left[Ru_{tt}^2 + (\Delta u)^2 + \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 \right] dQ.$$

Справедлива [11]

Теорема 1. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнены условия

$$k(x, 0) < 0, \quad a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и δ достаточно велико. Тогда вторая краевая задача при $N(t) \equiv 0$ имеет единственное решение $v_0(x, t)$ из $W_{\mathcal{L}}$, справедлива оценка

$$\|v_0\|_{\mathcal{L}} \leq C_1 [\|f\| + \|f_t\|], \quad C_1 > 0,$$

и выполнены условия

$$v_0|_\Gamma = 0, \quad v_{0t}|_{t=0} = 0, \quad \sqrt{|k_T(x)|}v_{0t}|_{\Omega_T^-} = 0.$$

4. Вспомогательная краевая задача для нелокальной второй краевой задачи

Пусть $u(x, t)$ — регулярное решение нелокальной краевой задачи (1), (2). Положим

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{(T-t)^2}{2T} \int_0^T N(\tau) u(x, \tau) d\tau,$$

$$N_0 = \frac{1}{2T} \int_0^T (T-t)^2 N(t) dt, \quad N_1 = (1 + N_0)^{-1},$$

при этом имеет место равенство

$$\int_0^T N(\tau) u(x, \tau) d\tau = N_1 \int_0^T N(\tau) v(x, \tau) d\tau.$$

Тогда функция $v(x, t)$ должна быть решением следующей краевой задачи.

Вспомогательная краевая задача. Найти в области Q решение уравнения

$$\mathcal{L}v = \Phi(x, t, v) + f(t, x), \quad (3)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{\Omega_T^-} = 0, \quad (4)$$

где

$$\Phi(x, t, v) = -\frac{N_1}{2T} (T-t)^2 \int_0^T N(\tau) \Delta v d\tau + \frac{N_1}{T} \left[k - a(T-t) + \frac{c(x)}{2} (T-t)^2 \right] \int_0^T N v d\tau.$$

Лемма 1. Для любой функции $v(x, t)$ из $W_{\mathcal{L}}$ справедлива оценка

$$\|\Phi(x, t, v)\| + \|\Phi_t(x, t, v)\| \leq C_2 |N_1| \|N\|_{L_2(0, T)} \|v\|_{\mathcal{L}}, \quad C_2 > 0. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 нетрудно получить из определения функции $\Phi(x, t, v)$ и нормы пространства $W_{\mathcal{L}}$, проводя оценку левой части (5) в норме $L_2(Q)$.

Лемма 2. Для любой функции $v(x, t)$ из $W_{\mathcal{L}}$ такой, что $v|_{\Gamma} = 0$, имеет место оценка

$$\left| \int_Q \Phi(x, t, v) (tv_t + v) dQ \right| \leq C_3 |N_1| \|N\|_{L_2(0, T)} \|v\|_1^2, \quad C_3 > 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(x, t) \in W_{\mathcal{L}}$ и $v|_{\Gamma} = 0$, функцию $\Phi(x, t, v)$ представим в виде

$$\Phi(x, t, v) = -\varphi(t) \int_0^T N(\tau) \Delta v(x, \tau) d\tau + \psi(x, t) \int_0^T N v d\tau,$$

где

$$\varphi(t) = \frac{N_1}{2T}(T-t)^2, \quad \psi(x, t) = \frac{N_1}{T} \left[k(x, t) - a(T-t) + \frac{c(x)}{2}(T-t)^2 \right].$$

С помощью интегрирования по частям получим равенство

$$\begin{aligned} \int_Q \Phi(x, t, v)(tv_t + v) dQ &= \int_Q [\varphi(t) - (\varphi t)_t] \sum_{i=1}^n \int_0^T N v_{x_i} d\tau v_{x_i} dQ \\ &\quad + \int_Q t\psi \int_0^T N v d\tau v_t dQ + \int_Q \psi \int_0^T N v d\tau v dQ. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу неравенства Коши — Буняковского будем иметь оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_Q t\psi \int_0^T N v d\tau v_t dQ \right| &\leq \max_Q |t\psi| \|N\|_{L_2(0,T)} \|v\| \|v_t\|, \\ \left| \int_Q \psi \int_0^T N v d\tau v dQ \right| &\leq \sqrt{T} \max_Q |\psi| \|N\|_{L_2(0,T)} \|v\|^2, \\ \left| \int_Q [\varphi(t) - (\varphi t)_t] \sum_{i=1}^n \int_0^T N v_{x_i} d\tau v_{x_i} dQ \right| &\leq \sqrt{T} \max_t |\varphi(t) - (\varphi t)_t| \|N\|_{L_2(0,T)} \int_Q \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ. \end{aligned}$$

В силу этих оценок из равенства (7) следует оценка (6). Лемма 2 доказана

Пусть $v_0(x, t)$ — решение краевой задачи (3), (4) при $N(t) \equiv 0$. Тогда для функции $v_0(x, t)$ при выполнении условий теоремы 1 будут справедливы утверждения данной теоремы.

Разрешимость вспомогательной краевой задачи (3), (4) устанавливается с помощью метода последовательных приближений:

$$\mathcal{L}v_m = \Phi(x, t, v_{m-1}) = f, \quad (8)$$

$$v_m|_{\Gamma} = 0, \quad v_{mt}|_{t=0} = 0, \quad v_{mt}|_{\Omega_T^-} = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, $|N_1| \|N\|_{L_2(0,T)}$ — достаточно малое число и

$$q = C_1 C_2 |N_1| \|N\|_{L_2(0,T)} < 1.$$

Тогда существует единственное решение $v(x, t) \in W_{\mathcal{L}}$ уравнения (3), для которого имеет место оценка

$$\|v\|_{\mathcal{L}} \leq C_4 [\|f\| + \|f_t\|], \quad C_4 = \frac{C_1}{1-q},$$

и выполнены условия

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad \sqrt{|k_T(x)|}v_t|_{\Omega_T^-} = 0. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 и леммы 1 краевая задача (8), (9) имеет единственное решение $v_m(x, t)$ из $W_{\mathcal{L}}$ такое, что

$$\|v_m\|_{\mathcal{L}} \leq C_1 \frac{1 - q^m}{1 - q} (\|f\| + \|f_t\|)$$

и имеют место условия

$$v_m|_{\Gamma} = 0, \quad v_{mt}|_{t=0} = 0, \quad v_{mt}|_{\Omega_T^-} = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

В силу линейности функции $\Phi(x, t, v)$ по v из уравнения (6) получим равенство

$$\mathcal{L}(v_m - v_{m-1}) = \Phi(x, t, v_{m-1} - v_{m-2}).$$

Из этого равенства в силу леммы 1 нетрудно получить оценку

$$\|v_m - v_{m-1}\|_{\mathcal{L}} \leq q^{m-1} \|v_1 - v_0\|_{\mathcal{L}}.$$

Далее, из последней оценки для целого $p \geq 1$ получаем

$$\|v_{m+p} - v_m\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{q^m}{1 - q} \|v_1 - v_0\|_{\mathcal{L}} \leq C_1 \frac{q^{m+1}}{1 - q} (\|f\| + \|f_t\|), \quad (11)$$

так как имеет место неравенство

$$\|v_1 - v_0\|_{\mathcal{L}} \leq C_1 q (\|f\| + \|f_t\|).$$

Из оценки (11) следует, что последовательность функций $\{v_m(x, t)\}$ фундаментальна в гильбертовом пространстве $W_{\mathcal{L}}$. Тогда существует функция $v(x, t) \in W_{\mathcal{L}}$ такая, что $v_m \rightarrow v$ в пространстве $W_{\mathcal{L}}$, $v(x, t)$ является решением уравнения (3) и выполнены условия (10).

Пусть функция $v(x, t) \in W_{\mathcal{L}}$ является решением однородного уравнения (3) и удовлетворяет краевым условиям (10). Тогда имеет место равенство

$$(\mathcal{L}v, tv_t + v) = \int_Q \Phi(x, t, v)(tv_t + v) dQ. \quad (12)$$

При этом справедливо соотношение [11]

$$(\mathcal{L}v, tv_t + v) = \int_Q \left\{ \left[\left(a - \frac{1}{2} k_t \right) t - \frac{3}{2} k \right] v_t^2 + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + \frac{T}{2} c v^2 + k_t^+ v_t v \right\} dQ + I,$$

где

$$I = \int_{\Omega_T} \left[\frac{T}{2} k_T^+ v_t^2 + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + \frac{T}{2} c v^2 + k_T^+ v_t v \right] dx.$$

В силу условий теоремы 2 и леммы 2 из равенства (12) получаем $\|v\|_1^2 = 0$, т. е. $v(x, t) = 0$. Следовательно, решение уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям (10), является единственным в $W_{\mathcal{L}}$. Теорема 2 доказана.

Отметим, что из оценки (11) следует оценка сходимости приближенного решения краевой задачи (1), (2) $\{v_m(x, t)\}$ к решению данной краевой задачи $v(x, t)$ из $W_{\mathcal{L}}$:

$$\|v - v_m\|_{\mathcal{L}} \leq C_1 \frac{q^{m+1}}{1 - q} (\|f\| + \|f_t\|).$$

4. Разрешимость нелокальной краевой задачи

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует единственное регулярное решение $u(x, t) \in W_{\mathcal{L}}$ уравнения (1), для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathcal{L}} \leq c_5(\|f\| + \|f_t\|), \quad c_5 > 0,$$

и выполнены условия

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \int_0^T Nu \, d\tau, \quad \sqrt{|k_T(x)|}u_t|_{\Omega_T^-} = 0. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(x, t) \in W_{\mathcal{L}}$ — функция из теоремы 2. Положим

$$u(x, t) = v(x, t) - \frac{N_1}{2T}(T-t)^2 \int_0^T N(\tau)v(x, \tau) \, d\tau.$$

Тогда функция $u(t, x) \in W_{\mathcal{L}}$ и удовлетворяет уравнению (1):

$$\mathcal{L}u = \Phi(x, t, v) + f - \frac{N_1}{2T}\mathcal{L} \left[(T-t)^2 \int_0^T N(\tau)v(x, \tau) \, d\tau \right] = f(x, t).$$

Нетрудно показать, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (13). А единственность функции $u(x, t)$ из $W_{\mathcal{L}}$ следует из теоремы 2. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
3. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
4. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа и их приложения. Ташкент: ФАН, 1974.
5. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
6. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
7. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
8. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
9. Артюшин А. Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 274–289.
10. Кожанов А. И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Докл. АН. 2014. Т. 457, № 2. С. 152–154.
11. Егоров И. Е., Сафонов С. В. Разрешимость второй краевой задачи для уравнения смешанного типа в весовом пространстве Соболева // Мат. заметки СВФУ. 2025. Т. 32, № 4.

С. 54–66.

Егоров Иван Егорович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Научно-исследовательский институт математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000

Сафонов Степан Васильевич
Республиканский лицей-интернат,
ул. Ойунского, 37, Якутск 670000

THE SECOND BOUNDARY VALUE
PROBLEM WITH INTEGRAL BOUNDARY
CONDITIONS IN TIME FOR A MIXED TYPE
EQUATION OF THE SECOND ORDER

I. E. Egorov and S. V. Safonov

Abstract: We consider a non-local second boundary value problem for a mixed-type equation in a cylindrical domain which reduces to the solvability of a local boundary value problem for a mixed-type integro-differential equation in a weighted Sobolev space. The solvability of the latter is established with the use of the successive approximations method. Under certain conditions, the coefficients of the equation are used to prove a theorem on unambiguous regular solvability of a non-local second boundary value problem in a weighted Sobolev space. The coefficient for the second derivative can change sign at the upper base of a cylindrical domain, with a negative value for the lower base.

DOI: 10.5281/zenodo.2301816382

Keywords: mixed type equation, non-local, second boundary value problem, solvability, inequality, estimation.

REFERENCES

1. *Tricomi F. G.*, On Linear Equations of Mixed Type [in Russian], Gostekhizdat, Moscow; Leningrad (1947).
2. *Bitsadze A. V.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Akad. Nauk SSSR, Moscow (1959).
3. *Smirnov M. M.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
4. *Salakhitdinov M. S.*, Equations of Mixed-Composite Type [in Russian], Fan, Tashkent (1974).
5. *Vragov V. N.*, Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (1983).
6. *Moiseev E. I.*, Mixed Type Equations with a Spectral Parameter [in Russian], Izdat. Mosk. Univ., Moscow (1988).
7. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.*, Higher-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Vychisl. Tsentr Sib. Otdel. Ros. Akad. Nauk, Novosibirsk (1995).
8. *Vragov V. N.*, "On the theory of boundary value problems for equations of mixed type in the space [in Russian]," *Differents. Uravn.*, **13**, No. 6, 1098–1105 (1977).
9. *Kozhanov A. I.*, "Problems with integral conditions for certain classes of nonstationary equations [in Russian]," *Dokl. Akad. Nauk.* **457**, No. 2, 152–154 (2014).
10. *Artyushin A. N.*, "A boundary value problem for a mixed type equation in a cylindrical domain," *Sib. Math. J.*, **60**, No. 2, 209–222 (2019).
11. *Egorov I. and Safonov S.*, "Solvability of the second boundary value problem for a mixed-type equation in a weighted Sobolev space [in Russian]," *Mat. Zamet. SVFU*, **32**, No. 4, 54–66

(2025).

Ivan E. Egorov
Ammosov North-Eastern Federal University,
Scientific Research Institute of Mathematics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia

Stepan V. Safonov
Republican Boarding Lyceum,
37 Oyunsky Street, Yakutsk 670000, Russia